Die laminare Grenzschicht 2. Ordnung längs eines Kreiszylinders mit poröser Oberfläche in einer Überschallströmung

Artur E. Wehrum

1975

Die laminare Grenzschicht 2. Ordnung längs eines Kreiszylinders mit poröser Oberfläche in einer Überschallströmung

Von der Abteilung für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Artur Wehrum
aus Kirchen a. d. Sieg

Berichter: Prof. Dr. rer. nat. W. Merzkirch
Prof. Dr.-Ing. M. Jischa
Prof. Dr.-Ing. K. Gersten
Tag der mündlichen Prüfung: 6. 2. 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Diese Arbeit entstand während meiner
Tätigkeit als Wissenschaftlicher Assistent
am Institut für Thermo- und Fluiddynamik
der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Gersten danke ich
für die Anregung und Unterstützung
meiner Arbeit.

Übersicht

Es wird die kompressible laminare Strömung für große Reynoldszahlen an der Oberfläche eines Kreiszylinders untersucht, der axial von einer homogenen Überschallströmung angeströmt wird. Der Zylinder sei hohl und dünnwandig und durch seine Oberfläche wird ein Fluid konstanter Massenstromdichte in die Grenzschicht geblasen. Dies führt bereits zu einer Ablösung der Grenzschicht 1. Ordnung. Hier wird nun der Einfluß von sog. Effekten 2. Ordnung, Querkrümmung, Verdrängungswirkung, Gleiten und Temperatursprung an der Wand, auf die Schubspannung und den Wärmeübergang untersucht. Von besonderem Interesse ist dabei die Beeinflussung der Ablöseerscheinung aus der Grenzschichtrechnung 1. Ordnung.

		Seite
	Nomenklatur	3
A	Einleitung mit Literaturübersicht	6
B	Theorie	
	Grundgleichungen zur Beschreibung des Problems	16
	Reibungslose Außenströmung 1. und 2. Näherung	20
	Grenzschichtströmung (Innenlösung)	28
	1. Näherung	29
	2. Näherung	30
	Geschwindigkeits- und Temperatursprung an der Wand	31
	Wandschubspannung und Wärmeübergang	33
	Transformation der Grenzschichtgleichungen	35
	Tansformation der Grenzschichtgleichungen 1. Ordnung	37
	Transformierte Druckfunktion	38
	Transformation der Gleichungen 2. Ordnung	39
	Transformierte Gleichungen für Wandschubspannung und Wärmeübergang	43
	Analytische Integration der Differentialgleichungen 2. Ordnung an der Vorderkante	45
C	Ergebnisse	
	Variationsbereich der Parameter	48
	Ergebnisse für die Grenzschicht 1. Ordnung mit Diskussion	49
	Ergebnisse für die 2. Näherung	54
	Druckverlauf	
	Grenzschicht 2. Ordnung	
	ohne Gleiten und für $\dot{m}_{1w} = 1$	56
	ohne Gleiten mit $\dot{m}_{1w} \neq 1$	73
	mit Gleiten und $\dot{m}_{1w} = 1$	77

Seite

Zusammenfassung 81

D Krümmungsterm in 1. Ordnung 83

Anhang

Diskussion des Chapman-Rubesin Parameters 88

Numerik 93

Nomenklatur

C = Chapman -Rubesin Parameter

C_f = Koeffizient für den Reibungswiderstand (Gl.(46))

f = dimensionslose Druckfunktion
s.Gl. (49) $f = \frac{\xi}{\dot{m}_1 w} \cdot P_2$

I_1, K_o, K_1 } modifizierte Zylinderfunktionen (Besselfunktionen mit rein imaginärem Argument)

$\dot{m}_w$ = Massenstromdichte an der Wand

Ma_∞ = Machzahl der ungestörten Strömung

p^* = statischer Druck

$\bar{p}$ = p^*/p_∞

p = $\frac{p^* - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$

Pr = Prandtlzahl = $\frac{\mu_\infty c_p}{\lambda_\infty}$

q^* = Wärmestrom

R_o = Zylinderradius

R = spez. Gaskonstante

Re = $\frac{U_\infty R_o}{\nu_\infty}$, Reynoldszahl

s = dimensionslose Koordinate

St = Stantonzahl (Gl.(48))

T^* = Temperatur (in Kelvin)

T = dimensionslose Temperatur T^*/T_∞

u^* = Geschwindigkeit in x^*-Richtung

U_∞ = Anströmgeschwindigkeit

u = auf U_∞ bezogene Geschwindigkeit u^*

v^* = Geschwindigkeit in y -Richtung

v = auf U_∞ bezogene Geschwindigkeit v^*

W = Ward'sche Funktion (Gl.(29))

x^* = Koordinate auf der Zylinderoberfläche parallel zur Achse

x = x^*/R_o

$\bar{x}$ = x

y^* = koord. senkrecht zur Zylinderoberfläche

y = y^*/R_o

$\bar{y}$ = mit ε gestreckte Koordinate y

z = x/β eine bezogene Koord. der Außenströmung

α = Akkomodationskoeffizient (s.S. 32)

β = $\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}$

γ = Gleitkoeffizient (s.S. 32)

δ = Verdrängungsdicke

ε = Störparameter $Re^{-\frac{1}{2}}$

σ = Integrationsvariable (Gl.58)

λ^* = Wärmeleitfähigkeit

μ^* = dyn. Zähigkeit

ρ^* = Dichte

λ = Koordinate bei der Laplace-Transf. (S.25)

λ, μ, ρ = auf die Größen der ungestörten Außenströmung bezogene Wärmeleitfähigkeit, Zähigkeit und Dichte

τ_w^* = Wandschubspannung

φ = Potentialfunktion

ξ, η = Koordinaten s.Gl.(50b)

$\bar{\eta}$ = Howarth-Koordinate s.Gl.(50a)

ω = Exponent im Zähigkeitsgesetz

Indizes:

∞	=	ungestörte Außenströmung
w	=	Zylinderoberfläche (Wand)
1	=	Theorie 1. Ordnung (1. Näherung)
2	=	Theorie 2. Ordnung
i	=	Innere Schicht (Grenzschicht)
a	=	äußere Schicht (Außenströmung)
*	=	dimensionsbehaftete Größen
i,j	=	Kennzeichnung eines Gitterpunktes (Numerik)

Teil A Einleitung

Bis in die fünfziger Jahre begnügte man sich damit, die Wirkung der Transportgrößen eines Fluids - Viskosität und Wärmeleitfähigkeit - auf einen umströmten Körper für den Bereich großer Reynoldszahlen (≙ kleine Zähigkeit) mit Hilfe der Prandtl'schen Differentialgleichungen, den Grenzschichtgleichungen, zu beschreiben. Die Prandtl'schen Gleichungen stellen dabei die 1. Näherung einer Entwicklung der Navier Stokes Gleichungen, den Erhaltungsgleichungen eines zähen Fluids, für große Reynoldszahlen dar. Der Einfluß der Transportgrößen spielt für diesen Bereich der Reynoldszahl nur in einer dünnen Grenzschicht am Körper eine Rolle. Solange die Grenzschichtdicke sehr klein ist im Vergleich zu den Abmessungen des Körpers und die als reibungslos angenommene Strömung außerhalb der Grenzschicht von dieser praktisch nicht beeinflußt wird, sind die Prandtl'schen Differentialgleichungen völlig ausreichend, um die Grenzschichtströmung genügend genau berechnen zu können.

Wird die Grenzschicht jedoch durch Aufheizung infolge innerer Reibung bei sehr hohen Geschwindigkeiten oder durch Ausblasen eines Massenstroms aus der Körperoberfläche in die Grenzschicht so dick, daß ihre Ausdehnung gegenüber den Körperabmessungen nicht mehr zu vernachlässigen ist und die nach der reibungslosen Theorie berechnete Umströmung des Körpers in der Umgebung der Körperoberfläche merklich gestört wird, so ist eine detailliertere Beschreibung als die oben erwähnte nicht mehr zu umgehen. Global gesehen, besteht die zusätzliche Information, die nun in der Grenzschichtrechnung berücksichtigt wird, in einer Aussage über die Körpergeometrie und der Rückwirkung der gestörten Außenströmung auf die Grenzschicht.

Eine spezielle Information über die Körpergeometrie, wie Quer- oder Längskrümmung, ist in den Grenzschichtgleichungen von Prandtl nicht enthalten; sie sind also für alle Körper, ungeachtet ihrer Form, gleich, vorausgesetzt, die Außenströmung ist dieselbe.

Die Gleichungen werden jedoch beeinflußt durch einen Druckgradient in der Außenströmung und einen Massentransport durch die Körperoberfläche. Beide Effekte, positiver Druckgradient in der Außenströmung und bereits schwaches Ausblasen eines Massenstroms aus der Körperoberfläche, können zu einer Ablösung der Grenzschicht von der Körperoberfläche führen. Sinngemäß sind diese Einflußfaktoren und deren Folgeerscheinung, die Ablösung, sog. Effekte 1. Ordnung, da sie bereits von den Prandtl'schen Gleichungen erfaßbar sind. Alle anderen Effekte sind dann von höherer Ordnung. Von höherer Ordnung heißt hier in einer Entwicklung der Navier-Stokes-Gleichungen nach $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{Re}} \ll 1$ jeweils von gleicher Größenordnung wie die entsprechende Näherung der Navier-Stokes-Gleichung.
Effekte 2. Ordnung sind demnach solche, die in den Gleichungen der 2. Näherung zum ersten Mal erscheinen.
Dies sind (van Dyke [24])

1. Transversalkrümmung
2. Longitudinalkrümmung
3. Verdrängungswirkung
4. Drehungsänderung in der Außenströmung
5. Entropiegradient in der Außenströmung
6. Gleiten und Temperatursprung an einer festen Begrenzung

Drei von ihnen, Transversalkrümmung, Verdrängungswirkung und Geschwindigkeits- bzw. Temperatursprung an einer Wand, werden zusammen mit dem Ausblasen eines über die Lauflänge konstanten Massenstroms senkrecht zur Körperoberfläche in dieser Arbeit untersucht; und zwar speziell ihre Wirkung auf die Schubspannung und den Wärmeübergang an der Wand und damit auf die Verlagerung des Ablöseortes.
Um die prinzipielle Tendenz der Wirkung der einzelnen Effekte auf das Verhalten der Grenzschicht abschätzen zu können, sei folgendes zu ihrer Phänomenologie gesagt.

a) poröse Körperoberfläche (Ausblasen mit $O(\frac{1}{\sqrt{Re}})$)

Eine Massenzufuhr in die Grenzschicht führt zu einer Zunahme der Grenzschichtdicke und damit zu einer Abnahme der Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten senkrecht zur Körperoberfläche. Wandschubspannung und Wärmeübergang nehmen ab und können völlig verschwinden. Das führt zur Ablösung der Grenzschicht von der Körperoberfläche [18].

b) Querkrümmung (Konvex, hier ein längsangeströmter Kreiszylinder)

Wegen der Zylindersymmetrie wird die Grenzschicht an einem Körper mit konvexer Querkrümmung dünner. Die Folge ist eine Zunahme aller Gradienten senkrecht zur Oberfläche und folglich ein Anwachsen von Wandschubspannung und Wärmeübergang ([4], [16]).
Die Wirkung der konvexen Querkrümmung hat die entgegengesetzte Tendenz wie die der Massenzufuhr und wird eine Ablösung verzögern.

c) Die Verdrängungswirkung der Grenzschicht induziert in der Außenströmung einen Druck, der seinerseits wieder Rückwirkungen auf die Grenzschicht hat. In Abhängigkeit vom geometrischen Verlauf der Verdrängungsdicke kann der Druck in Strömungsrichtung zu- oder abnehmen. Es bleibt daher noch offen, ob die Verdrängungswirkung eine Verzögerung oder eine Beschleunigung der Grenzschichtströmung zur Folge hat. Die Rechnung wird dann zeigen müssen, in welche Richtung die Ablösestelle verschoben wird.

d) Zur Wirkung von Geschwindigkeits- und Temperatursprung auf Wandschubspannung und Wärmeübergang läßt sich à priori nichts Definitives sagen. Es sei jedoch vermerkt, daß INGER u. SWEAN [28] gefunden haben, daß bei hinreichend

schwachem Ausblasen die Schubspannung und der Wärmeübergang an der Wand durch die Unstetigkeiten der Geschwindigkeit und Temperatur vergrößert werden. MASLEN [14] hat gezeigt, daß bei undurchlässiger Wand der Effekt keine Wirkung auf Wandschubspannung und Wärmeübergang in 2. Näherung hat.

Da die drei Effekte 2. Ordnung b, c, d, eine unterschiedliche Tendenz in ihrer Wirkung auf die Wandschubspannung zeigen, wird erst die Rechnung zeigen, welcher der dominierende ist und ob demzufolge insgesamt die Ablösestelle stromauf- oder stromabwärts verschoben wird.

Einige Resultate über das Ablöseverhalten, die bereits aus den Prandtl'schen Gleichungen folgen.

Damit überhaupt bei Ausblasen die Grenzschicht in endlicher Entfernung von der Vorderkante ablöst, muß bei einer Ausblaseverteilung $\dot{m}_w \sim x^n$ (x = Entfernung von der Vorderkante), $n > -\frac{1}{2}$ sein, da für $n = \frac{1}{2}$, wenn überhaupt, die Grenzschicht direkt an der Vorderkante ablöst. Für Ausblaseverteilungen mit $n > -\frac{1}{2}$, also auch für konstante Massenzufuhr, sind keine ähnlichen Lösungen der Grenzschichtgleichungen mehr möglich.

Ablösung der Grenzschicht tritt bekanntlich auch auf bei einer Druckzunahme in der ungestörten Außenströmung. Die Umkehrung des Vorzeichens, negativer Druckgradient, hat wie Absaugen natürlich die entgegengesetzte Wirkung zur Folge [7]. Wie NICKEL [29] jedoch gezeigt hat, ist der Druckgradient der dominierende Effekt. Absaugen bewirkt zwar bei positivem Druckgradient eine Verschiebung der Ablösestelle, definiert durch den Nulldurchgang der Wandschubspannung, stromabwärts, aber bereits ein schwacher negativer Druckgradient in der ungestörten Außenströmung unterdrückt wegen seiner beschleunigenden Wirkung auf die Grenzschicht ein Ablösen aufgrund von Massenzufuhr völlig. Das Verhalten der Grenzschicht ist auch abhängig von der Art wie die Ablösung hervorgerufen wird. Im Gegensatz zur Ablösung infolge eines Druckgradienten tritt bei Ausblasen hinter der Ablösestelle keine Rückströmung auf, jedenfalls nicht in erster Näherung. Wenn $x_s - x$ der

Abstand vom Ablösepunkt ist, geht im 1. Fall (Druckgradient) die Wandschubspannung mit $(x_s - x)^{\frac{1}{2}}$ zu null, während sie im 2. Fall ein völlig anderes Verhalten zeigt, nämlich $\tau_w \sim \left[\frac{x_s - x}{\ln(x_s - x)}\right]^2$. Das letzte Ergebnis ist von Catherall und Stewartson [18] hergeleitet worden, die in derselben Arbeit mit Williams für die ebene Platte in inkompressibler Strömung und konstanter Ausblasegeschwindigkeit die Lage des Ablösepunktes mit großem Aufwand an numerischer Genauigkeit bestimmt haben. Es gelang ihnen jedoch nicht, die analytische Entwicklung um die Ablösestelle wegen des sehr kleinen Konvergenzradius an die numerische Lösung anzupassen, die ihrerseits bei Annäherung an die Ablösestelle immer ungenauer wird. Diese divergente Tendenz der numerischen Lösung in der unmittelbaren Nähe der Ablösestelle spiegelt das singuläre Verhalten der Grenzschichtgleichung 1. Ordnung am Ort der Ablösung wieder, da dort die Bewegungsgleichung identisch verschwindet und damit auch jede beliebige höhere Ableitung der Geschwindigkeit. Diese Eigenschaft macht auch den Versuch zunichte, mit Hilfe einer einfachen Taylorreihenentwicklung der Geschwindigkeit um den Ort der Ablösung eine Information über das Strömungsfeld in der Nähe der Singularität zu erhalten, wie es z.B. von BUCKMASTER [2] für die Ablösung infolge eines Druckgradienten gemacht worden ist.

Die von Stewartson gefundene Funktion für den Verlauf der Wandschubspannung in der Nähe des Ablöseortes zeigt, daß im Fall der Ablösung wegen Ausblasen dort nicht nur die Funktion selbst null wird, sondern auch ihre Neigung und Krümmung. Dieses Verhalten läßt die Frage offen, ob die Schubspannung wirklich exakt null wird, wie bei der Ablösung durch einen Druckgradienten. Zulässig ist nur die Folgerung, daß sie bezüglich der Größenordnung der Grenzschichtabmessungen verschwindet, also $\tau_w = o\,(Re^{-\frac{1}{2}})$ wird.

KASSOY [9] hat dieses Problem für die inkompressible Strömung an der ebenen Platte untersucht. Und zwar für die Ausblasefunktion $\sim c/\sqrt{x}$, die auf ähnliche Lösungen der klassischen Grenzschichtgleichung führt.

Bekanntlich existiert dabei ein kritischer Wert C_o für den Ausblaseparameter C. Für $C < C_o$ findet keine Ablösung statt und für $C \geq C_o$ löst die Grenzschicht direkt an der Vorderkante ab und bildet eine freie Scherschicht. Der Vorteil der ähnlichen Lösung der klassischen Grenzschichtgleichung liegt in einer darauf aufbauenden relativ einfachen mathematischen Behandlung der Gleichungen für die 2. Näherung, die keine selbstähnlichen Lösungen mehr besitzen. Für diese Klasse von Lösungen ist nämlich eine Reihenentwicklung der gestörten Außenströmung um die Vorderkante sinnvoll, da die Störung mit wachsender Entfernung in Strömungsrichtung abnimmt. Eine solche Entwicklung nimmt Kassoy für den durch die Verdrängung induzierten Druck an. Er kommt damit zu dem Ergebnis, daß für $C = C_o$: $\tau_w = O\,(Re^{-1} \ln Re)$ ist. Als Vergleich dazu ist für $C < C_o$: $\tau_w = O\,(Re^{-\frac{1}{2}})$ und aus einer früheren Arbeit von Kassoy und nach KLEMP u. ACRIVOS [10] gilt für $C > C_o$: $\tau_w = O\,(Re^{-\frac{5}{6}})$. Das Resultat ist nicht nur bemerkenswert, weil die Wandschubspannung nicht exakt null wird, sondern weil sie auch keine monotone Funktion des ausgeblasenen Massenstroms ist.

Diese Schlußfolgerung ist prinzipiell übertragbar auf nichtähnliche Lösungen, also auch auf solche mit konstantem ausgeblasenen Massenstrom. Nur wäre der Weg dorthin ungleich schwieriger, da die Ablösung erst in endlicher Entfernung von der Vorderkante stattfindet und an sich alle drei oben angegebenen Größenordnungen der Schubspannung auftreten und die Grenzschicht in drei hintereinanderliegende Bereiche aufteilen. Die mathematische Methode, die bei den ähnlichen Lösungen angewendet wurde, ist nicht brauchbar, da die Störung von der Vorderkante an in Strömungsrichtung nicht monoton abnimmt. Um nun die Einflüsse auf die Strömung, die nicht in den Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen enthalten sind - hier die oben genannten drei Effekte 2. Ordnung - in der Rechnung zu berücksichtigen, sind zwei Methoden gebräuchlich. Bei der älteren werden einfach aus den Navier-Stokes-Gleichungen Terme, die den jeweiligen Effekt, z.B. die Quer-

krümmung, wiedergeben, zusätzlich mit in die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen übernommen. Dies ist das Verfahren der "Berücksichtigung von Effekten höherer Ordnung in einer 1. Ordnung Rechnung" [13]. Diese Methode ist sehr häufig angewendet worden zur Erfassung der Querkrümmung und ihrer Wirkung auf Schubspannung und Wärmeübergang. (Glauert u. Lighthill [6], Seban u. Bond [16], Clutter u. Smith [4] u.a.)

Die Konsistenz des Verfahrens ist jedoch zweifelhaft, solange der Krümmungsradius die Grenzschichtdicke in der Größenordnung überwiegt, d.h. solange gilt $O(R) > O(\delta)$. In allen diesen Arbeiten ist nämlich der Krümmungsterm in den Erhaltungsgleichungen von der gleichen Größenordnung wie alle übrigen Terme. In Teil D dieser Arbeit wird diese Problematik noch näher diskutiert.

Das zweite Verfahren ist von van Dyke, das auf der Methode der Angepaßten asymptotischen Entwicklung nach Kaplun basiert. Es handelt sich um eine singuläre Störungsrechnung, bei der der Störparameter, nach dem die Navier-Stokes-Gleichungen entwickelt werden, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{Re}}$ ist.
Wie schon erwähnt, ist die erste Stufe dieser Entwicklung die nichtlineare klassische Grenzschichtgleichung von Prandtl.
Eine notwendige Folge des Verfahrens ist die Linearität der Gleichungen aller folgenden Näherungen. (van Dyke)
Ein wesentlicher Vorteil besteht darin, daß die einzelnen Effekte und ihre Bedeutung in der jeweiligen Näherung systematisch erfaßt werden. Überdies können die unterschiedlichen Effekte in der Näherung aufgrund der Linearität der Gleichungen separariert werden. Hier tritt auch ein entscheidender Nachteil der ersten Methode zutage: Die Gleichungen 1. Ordnung sind immer nichtlinear und somit unterschiedliche Effekte nicht separarierbar. Außerdem weiß man einfach durch Hinzunahme des oder der Terme aus den Navier-Stokes-Gleichungen, die den jeweilig gewünschten Einfluß charakterisieren, nie, bis zu welcher Größenordnung bezüglich ε der Effekt denn nun berücksichtigt worden ist.

Bemerkungen zu Arbeiten, in denen Effekte höherer Ordnung behandelt werden und die somit über den Rahmen der klassischen Grenzschichtgleichungen hinausgehen

Die folgende kleine Tabelle gibt eine Übersicht der repräsentativen Arbeiten, in denen Effekte 2. Ordnung behandelt werden. (In der aufgeführten Arbeit von Kassoy wird zwar eine inkompressible Strömung untersucht, doch wegen ihrer grundlegenden Bedeutung ist sie hier mit angegeben.)

Kompressible Überschallgrenzschicht 2. Ordnung

Art der Lösung:	ähnliche Lösung für die 1. Ordnung mit einer Reihenentwicklung für die Gln. der 2. Näherung	Lösung der vollen partiellen Dgln.
Ausblasen mit $O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$	[5] 1973	X
Verdrängungswirkung	[9] 1974, [12] 1952, [11]1955, [22] 1962, [5] 1973	X
Krümmung	[22], [5]	X
Geschwindigkeits- und Temperatursprung an der Wand	[14] 1963	X
Wechselwirkung zwischen Verdichtungsstoß u. Grenzschicht	[11] 1955	

Die Lösung für die angekreuzten Felder wird in dieser Arbeit geliefert.

Die Kompressibilität des Fluids gewinnt erst für Machzahlen $Ma \gtrsim 0{,}3$ an Bedeutung. Wegen des elliptischen Charakters der Differentialgleichung für die gestörte Außenströmung im Unterschallbereich wird in fast allen Arbeiten, in denen Effekte höherer Ordnung behandelt werden, nur eine Überschallströmung betrachtet, die aufgrund ihres hyperbolischen Charakters einer mathematischen Behandlung zugänglicher ist. In diesem Bereich ist die Strömung notwendigerweise kompressibel.

Bei allen Arbeiten, im Prinzip auch bei den älteren, wird die Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklung verwendet.

Bei den hier aufgelisteten Arbeiten mit Massenzufuhr wird eine Ausblaseverteilung zugrunde gelegt, die auf selbstähnliche Lösungen führt. Der Ausblasparameter ist, mit Ausnahme der Arbeit von Kassoy [9], "unterkritisch", d.h. es tritt keine Ablösung der Grenzschicht ein.

In den Arbeiten von Lees und Probstein und von Kuo sind Entwicklungen für Hyperschall, d.h. für $Ma_\infty \gtrsim 5$, durchgeführt worden. Als Besonderheit verwendet Kuo zusätzlich eine Störungsrechnung für die Koordinate in Hauptströmungsrichtung (sog. PLK-Methode), um das singuläre Verhalten der Lösung an der Vorderkante zu unterdrücken. Die Lösung zeigt aber auch, daß der Einfluß des Verdichtungsstoßes auf den Druckverlauf auf einen engen Bereich in der Nähe der Vorderkante beschränkt ist und speziell in dem Bereich der in der vorliegenden Arbeit von Interesse ist, das Gebiet in der Nähe der Ablösestelle 1. Ordnung vernachlässigt werden kann.

Motivation und Durchführung der vorliegenden Arbeit

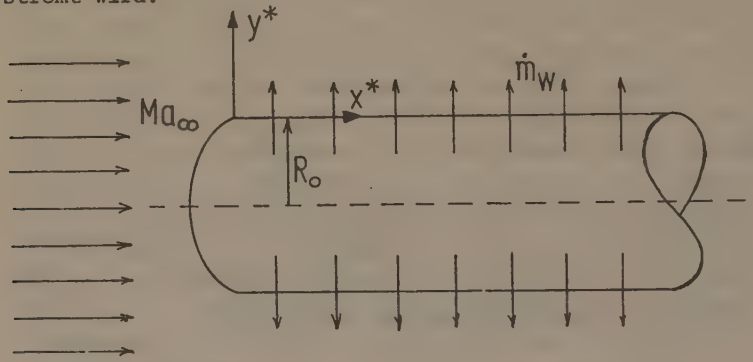
Nach Abwägen der Möglichkeiten, die Folgerungen der bereits diskutierten Arbeit von Kassoy auf den Fall zu übertragen, daß die Grenzschicht erst in endlicher Entfernung von der Vorderkante ablöst, war es naheliegend, zunächst den 1. Bereich mit $\tau_w = O(\frac{1}{\sqrt{Re}})$ zu untersuchen.
Ausgehend von der Arbeit von Catherall , Stewartson und Williams [18] wird die Beeinflussung der dort gefundenen Ablösung der laminaren Grenzschicht ($\tau_w = O\,\frac{1}{\sqrt{Re}}$) infolge Massenzufuhr durch

die bereits vorher angesprochenen Effekte - Querkrümmung, Verdrängungswirkung, Geschwindigkeits- und Temperatursprung an der Wand - in einer kompressiblen Überschallströmung bestimmt. Der geeignete Körper zur Realisierung dieser Effekte ist ein halbunendlich langer, dünnwandiger Kreiszylinder, der von einer homogenen Parallelströmung axial angeströmt wird, und aus dessen Oberfläche ein konstanter Massenstrom ausgeblasen wird. Es wird die Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklung, nach van Dyke, verwendet, um die notwendigen Gleichungen aus den Navier-Stokes Gleichungen zu entwickeln und die Lösung von Grenzschicht- und Außenströmung zusammenzufügen. Die parabolischen Differentialgleichungen für die Grenzschicht werden numerisch gelöst bis zum Ablösepunkt 1. Ordnung. Die Differentialgleichung für die gestörte Außenströmung wird nach der Methode von Lighthill und Ward [26] gelöst.
Wo diese Arbeit in der Vielzahl der Arbeiten, in denen Effekte höherer Ordnung behandelt werden, einzuordnen ist, wird an der voranstehenden kleinen Tabelle deutlich.

Der Hauptteil der Arbeit ist nach folgenden Gesichtspunkten gegliedert.
Zunächst werden die benötigten Differentialgleichungen hergeleitet und mit den notwendigen Transformationen nach Außen- und Innenströmung getrennt für die numerische Behandlung aufbereitet.
Es folgen die Darstellung und Diskussion der numerischen Ergebnisse und eine kritische Betrachtung für den Fall, daß die Querkrümmung als Effekt 1. Ordnung auftritt. Natürlich steht die physikalische Interpretation der Ergebnisse im Vordergrund, aber der Weg dorthin ist eng verknüpft mit Problemen der numerischen Mathematik. Den Schluß bildet daher eine Abhandlung über die verwendete Numerik.

Teil B: Analysis

Es wird die Strömung entlang der Oberfläche eines halbunendlich langen, dünnwandigen Hohlzylinders untersucht, der von einer homogenen, parallelen Überschallströmung axial angeströmt wird.



Senkrecht zur Zylinderwand wird ein Massenstrom konstanter Stärke ausgeblasen. Die chemische Zusammensetzung des ausgeblasenen Fluids ist dabei die gleiche wie die der ankommenden Strömung.

Die Annahme einer Überschallströmung liefert auch bis einschließlich der hier betrachteten Näherung den Vorteil, daß sich die Strömung innerhalb und außerhalb des Zylinders nicht gegenseitig beeinflussen können wie bei Unterschall. Es ist im folgenden nur von der Strömung außerhalb des Zylinders die Rede. Da die Störung der Strömung durch die Grenzschicht klein sein soll, wird angenommen, daß in der Strömung keine Diskontinuitäten auftreten, d.h. insbesondere kein Verdichtungsstoß an der Vorderkante. Daher treten in 2. Näherung auch kein Entropiegradient und keine Drehung in der Außenströmung auf. Die mathematische Darstellung des Problems wird bekanntlich durch die Erhaltungsgleichungen der Masse, des Impulses und der Energie mit den zugehörigen Randbedingungen gewährleistet.

Das Gleichungssystem wird vervollständigt durch eine thermodynamische Zustandsgleichung und durch die Gleichungen für die Transportkoeffizienten des Fluids.

Das Gleichungssystem für das zylindersymmetrische Problem in dimensionsbehafteten Größen lautet (siehe z.B. [5]):

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(r\rho v) = 0 \tag{1}$$

Impulsgleichung in x-Richtung:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(\mu r \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(\mu r \frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}[\mu(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{r})] \tag{2}$$

Impulsgleichung in y-Richtung:

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial y}(\mu r \frac{\partial v}{\partial y}) - \frac{2\mu}{r^2} v + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}[\mu(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{r})] \tag{3}$$

Energiegleichung:

$$\rho c_p [u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}] = u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(r\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) + \mu \Phi \tag{4}$$

dabei ist Φ die Dissipationsfunktion:

$$\Phi = 2[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{v}{r})^2] + [\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}]^2 - \frac{2}{3}[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{r}]^2$$

$$p = \rho R T \; ; \qquad (6)$$

$$\mu = \mu(T) \; ; \qquad (7a)$$

$$\lambda = \lambda(T) \; ; \qquad (7b)$$

mit den Randbedingungen

$x < 0$: $u = U_\infty$, $v = 0$, $p = p_\infty$, $T = T_\infty$

$x \geq 0$, $y = 0$: $u = u_w$, $\rho v = \dot{m}_w = \text{konst}$, $T = T_w$

$x \geq 0$, $y \to \infty$: $u = U_\infty$, $T = T_\infty$

die spezifische Wärmekapazität c_p sei konstant;
y ist die Koordinate senkrecht zur Zylinderwand. Der Zylinderradius ist R_o = konst, und somit ist $r = R_o + y$.

x ist die Koordinate in axialer Richtung mit dem Ursprung an der Vorderkante.

Wegen der Rotationssymmetrie entfällt die Winkelabhängigkeit in den Differentialgleichungen. Das Problem ist quasi-eben.

Die Druckabhängigkeit von μ und λ ist zu vernachlässigen. Über die Temperaturabhängigkeit wird später Näheres gesagt.

Da es sich um ein System elliptischer Differentialgleichungen handelt, dessen Randbedingungen nicht auf einer geschlossenen Kontur bekannt sind, ist es allgemein nicht lösbar. Man kann jedoch asymptotische Lösungen finden, wie es zuerst von Prandtl für große Reynoldszahlen mit Erfolg durchgeführt worden ist.

Die sogenannten Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen sind dabei die erste Näherung einer Parameterentwicklung der Navier-Stokes-Differentialgleichungen; einer Methode, der

singulären Strömungsrechnung, die nach grundlegenden Arbeiten, u.a. von van Dyke, immer häufiger mit Erfolg bei Problemen mit Grenzschichtcharakter angewandt wird. Dazu werden die Differentialgleichungen (1) bis (5) zunächst dimensionslos gemacht. Die Bezugsgrößen sind, außer beim Druck, die jeweiligen Werte in der ungestörten Strömung, also:

$$u = \frac{u}{U_\infty}; \quad v = \frac{v}{U_\infty}; \quad T = \frac{T}{T_\infty}; \quad = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad ;$$

$$\text{und} \quad p = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2}$$

Die charakteristische geometrische Größe ist der Zylinderradius R_o:

$$x = \frac{x}{R_o} \quad ; \quad y = \frac{y}{R_o} \quad .$$

(Für die ebene Platte wäre hier die geeignete Länge

$$L = \frac{\nu_\infty}{U_\infty} \left(\frac{\rho_w v_w}{\rho_\infty U_\infty}\right)^{-2} \quad .)$$

(Der Einfachheit halber werden die dimensionslosen Größen genauso bezeichnet wie vorher die dimensionsbehafteten.) Dimensionsbehaftete Größen werden im folgenden indiziert sein. ($*$ oben oder ∞ unten).

Die dimensionslose Form des Gleichungssystems zeigt sofort, daß der entscheidende Parameter die Reynoldszahl $Re = \frac{\rho_\infty U_\infty R_o}{\mu_\infty}$ ist. Gesucht ist die Lösung des Systems für große Reynoldszahlen. $Re >> 1$ bedeutet hier $\mu_\infty << 1$, während ρ_∞, U_∞, $R_o = O(1)$ sind.

Wie man weiß, (vgl. z.B. [23]). handelt es sich bei der Näherung der Navier-Stokes-Gleichungen für $Re \to \infty$ um ein singuläres Störungsproblem. D.h., eine Näherungslösung ist nicht für das ganze Lösungsgebiet gültig, sondern nur in einem Teilbereich. Das führt hier auf die bekannte Aufteilung der Strömung in einem wandnahen Bereich, die Grenzschicht und die Strömung außerhalb dieses schmalen Bereichs, die Außenströmung. Für

jedes Gebiet läßt sich nun getrennt eine Näherungslösung finden. Die Verbindung der beiden Lösungen am äußeren Rand der Grenzschicht wird dabei nach der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklung durchgeführt. Der Unterschied zu klassischen Verfahren bei singulären Störproblemen besteht darin, daß die Lösungen der verschiedenen Bereiche am gemeinsamen Rand nicht auf einer Linie gleichgesetzt werden, sondern in einem Überlappungsbereich übereinstimmen müssen, gemäß dem "Extension Theorem" von Kaplun. Folgt man von Dyke, so ist der Störparameter bei Grenzschichtrechnungen $\varepsilon = Re^{-1/2}$ und die Gewichtsfunktionen der Näherungen höherer Ordnung sind ganze Potenzen von ε.

Die Außenströmung

Die Erhaltungsgleichungen lauten hier (dimensionslos):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(\rho r v) = 0 \tag{8}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + O(\varepsilon^2) \tag{9}$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + O(\varepsilon^2) \tag{10}$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = (\kappa-1)\, Ma_\infty^2 \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y}\right) = O(\varepsilon^2) \tag{11}$$

$$1 + \kappa\, Ma_\infty^2\, p = \rho T \tag{12}$$

Die abhängigen Variablen werden in der oben angegebenen Weise entwickelt.

$$u = u_1^a + \varepsilon u_2^a + \dots$$
$$v = v_1^a + \varepsilon v_2^a + \dots$$
$$p = p_1^a + \varepsilon p_2^a + \dots$$
$$\rho = \rho_1^a + \varepsilon \rho_2^a + \dots$$
$$T = T_1^a + \varepsilon T_2^a + \dots \qquad (a = \text{außen})$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Differentialgleichungen ein und ordnet nach Potenzen von ε (y fest), so erhält man als Differentialgleichungen der 1. Näherung:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_1^a u_1^a) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(\rho_1^a r v_1^a) = 0$$

$$\rho_1^a u_1^a \frac{\partial u_1^a}{\partial x} + \rho_1^a v_1^a \frac{\partial u_1^a}{\partial y} = -\frac{\partial p_1^a}{\partial x}$$

$$\rho_1^a u_1^a \frac{\partial v_1^a}{\partial x} + \rho_1^a v_1^a \frac{\partial v_1^a}{\partial y} = -\frac{\partial p_1^a}{\partial y}$$

$$\rho_1^a u_1^a \frac{\partial T_1^a}{\partial x} + \rho_1^a v_1^a \frac{\partial T_1^a}{\partial y} = \left(u_1^a \frac{\partial p_1^a}{\partial x} + v_1^a \frac{\partial p_1^a}{\partial y}\right)(\kappa-1)\,Ma_\infty^2$$

Die Lösung muß als Randbedingung die ankommende ungestörte Parallelströmung erfüllen. Das bedeutet, für $x < 0$ gilt:

$$u_1^a = 1\ ;\quad v_1^a = 0\ ;\quad p_1^a = 0\ ;\quad \rho_1^a = 1\ ;\quad T_1^a = 1\ .$$

Wie man anhand der Differentialgleichungen damit erkennt, ist das auch die Lösung für $x > 0$. Die 1. Näherung der Außenströmung ist einfach die ungestörte Parallelströmung. Für die 2. Näherung gilt damit:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_2^a + \rho_2^a) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(r v_2^a) = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial u_2^a}{\partial x} = -\frac{\partial p_2^a}{\partial x} \qquad (14)$$

$$\frac{\partial v_2^a}{\partial x} = -\frac{\partial p_2^a}{\partial y} \qquad (15)$$

$$\frac{\partial T_2^a}{\partial x} = (\kappa-1)\,Ma_\infty^2 \frac{\partial p_2^a}{\partial x} \qquad (16)$$

$$\kappa\, Ma_\infty^2\, p_2^a = \rho_2^a + T_2^a \qquad (17)$$

aus den Gleichungen (14) und (15) folgt nach Elimination von p_2:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_2^a}{\partial x} - \frac{\partial u_2^a}{\partial y}\right) = 0 \quad .$$

Das bedeutet, die Drehung $\omega_2 = \frac{\partial v_2^a}{\partial x} - \frac{\partial u_2^a}{\partial y}$ kann höchstens eine Funktion von y sein. Die ankommende Strömung soll drehungsfrei sein. Da die Gleichungen der 1. und 2. Näherung für die Außenströmung reibungsfrei sind und auch kein Verdichtungsstoß auftreten soll, muß auch $\omega_2 = 0$ sein. Reibung und Verdichtungsstoß sind hier aber auch die einzigen entropieerzeugenden Mechanismen. Da beide fehlen, bleibt auch die Entropie s = konstant. Die Schallgeschwindigkeit ist wie in der ungestörten Strömung bestimmt durch

$$a^{*2} = \left(\frac{\partial p^*}{\partial \rho^*}\right)_s = \kappa \frac{p^*}{\rho^*} = a_\infty^2 \frac{\bar{p}}{\rho} = a_\infty^2 \frac{1+\varepsilon\kappa Ma_\infty^2 p_2^a}{1+\varepsilon\rho_2^a} \quad / \left(\bar{p} = \frac{p^*}{p_\infty}\right)$$

mit Gleichung (17) wird daraus:

$$a^{*2} = a_\infty^2 \left(1+\varepsilon T_2^a \ldots\right)$$

Da andererseits $\frac{\partial p^*}{\partial \rho^*} = a_\infty^2 Ma_\infty^2 \frac{\partial p_2}{\partial \rho_2}$ ist, kann man mit Hilfe von Gleichung (14) in der Kontinuitätsgleichung den Faktor $\frac{\partial \rho_2^a}{\partial x}$ eliminieren und erhält schließlich

$$\left(1-Ma_\infty^2\right) \frac{\partial u_2^a}{\partial x} + \frac{\partial v_2^a}{\partial y} + \frac{v_2^a}{r} = 0 \qquad (18)$$

Wegen der Drehungsfreiheit läßt sich ein Störpotential φ durch $u_2^a = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v_2^a = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ definieren, und man erhält die Potentialgleichung für die gestörte Strömung.

$$\left(1-Ma_\infty^2\right)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1}{r}\varphi_y = 0 \qquad (19)$$

Gesucht ist die Lösung der Differentialgleichung, die für $y = 0$ die Bedingung $v_2^a(x, y\to 0) = v^i(x, \bar{y}\to\infty)$ erfüllt. Dabei ist $v^i(x, \bar{y}\to\infty)$ die Geschwindigkeit senkrecht zur Wand am Außenrand der Grenzschicht; sie folgt aus der 1. Näherung der Innenlösung, der Grenzschichtgleichungen 1. Ordnung. $\bar{y}$ ist die später er-

läuterte Grenzschichtkoordinate (s. S.28).

Die Differentialgleichung ist an sich von sehr einfacher Form. Sie ist die aufgrund der Zylindersymmetrie um einen Krümmungsterm erweiterte Potentialgleichung des entsprechenden ebenen Problems, dessen Lösung einfach durch die bekannte Ackert'sche Formel dargestellt wird. Durch den zusätzlichen Term im zylindersymmetrischen Fall ist ein dem Ackert'schen Lösungsweg analoges Vorgehen nicht erfolgreich. Natürlich läßt sich die Gleichung nach bekannten Standardmethoden zur Lösung hyperbolischer partieller Differentialgleichungen formal lösen, z.B. Bernoulliansatz, Kaskadenmethode, etc. Die so gefundenen Lösungen können aber die geforderte Randbedingung an der Wand nicht erfüllen. Die Lösungsmethode mit Hilfe einer Quellverteilung ist sehr mühsam und läßt eine geschlossene Lösung nur in Form einer Reihenentwicklung nach x zu, deren Gültigkeitsbereich auf die nähere Umgebung der Vorderkante beschränkt ist.

Hier wird ein Verfahren verwendet, das zunächst von Lighthill vorgeschlagen und dann von Ward durchgeführt worden ist. Bei diesem Verfahren wird auf die Gleichung (19) bezüglich der x-Koordinate eine etwas modifizierte Laplacetransformation angewendet [26].

Transformation: $\varphi(y,p) = p \int_0^\infty \varphi(y,x)\ e^{-px}\ dx$

(p ist hier die Koordinate in der Bildebene.)

Wegen des hyperbolischen Charakters der Differentialgleichung (19) für $Ma_\infty > 1$ liegt das Einflußgebiet der Störung ganz im Bereich $x > 0$. Für $x = 0$, $y > 0$ ist die Strömung noch ungestört und die Randbedingung dort ist dann

$$x = 0: \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0\ ,\ \varphi = 0\ .$$

Die transformierte Gleichung lautet dann:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta^2 p^2 \varphi = 0 \qquad (20)$$

mit $\varphi = \varphi(y, p)$ und $\beta^2 = (Ma_\infty^2 - 1)$

Für diese Differentialgleichung gibt es Standardlösungen. Es sind Kombinationen von ganzzahligen Neumannfunktionen mit rein imaginären Argument. Wenn $v_\infty^i(x)$ die aus der Grenzschichtrechnung 1. Ordnung resultierende Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung am Rand der Verdrängungsschicht ist, dann ist die Randbedingung für φ bei $y = 0$ ($y = 0 \triangleq r = 1$).

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = v_\infty^i(x)$$

und wenn V(p) die Laplacetransformierte von v_∞^i ist:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = V(p) \qquad (21)$$

Im vorliegenden Fall ist die Lösung von (20)

$$\varphi = a_o(p)\ K_o(\beta\ p(1+y)) \qquad (22)$$

K_o ist eine Zylinderfunktion mit rein imaginärem Argument und Index "0"; sie entspricht der Neumann'schen Funktion mit ganzzahligem Index für reelles Argument. Der Koeffizient a_o wird weiter unten bestimmt. K_o stellt den Verlauf einer Störung dar, die vom Zylinder ausgeht und sich nach außen und stromabwärts ausbreitet und deren Intensität mit $\frac{1}{1+y}$ abnimmt. In der Gasdynamik ist diese Störung charakterisiert durch Mach'sche Wellen. Hier interessiert nur die Größe dieser Störung an der Wand ($y=0$), da diese die Randbedingungen und den Druckverlauf für die Grenzschichtrechnung 2. Ordnung liefert.

Gleichung (22) wird in die Gleichung (21) eingesetzt und mit den bekannten Eigenschaften der Besselfunktionen gilt:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = \beta p a_o(p)\ K_o'(\beta p(1+y))_{y=0} = -\beta p a_o(p)\ K_1(\beta p) = V(p)$$

Damit kann man den Koeffizienten a_o in (22) eliminieren und erhält für die Störgeschwindigkeit in x-Richtung

$$u_2^a(y=0) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{y=0} = p\varphi_{y=0} = -\frac{K_o(\beta p)}{\beta K_1(\beta p)}\, V(p) \qquad (23)$$

Der Druck wird aus der linearisierten Energiegleichung bestimmt. Wegen der Isentropie gilt:

$$\frac{1}{2}\left[(1 + \varepsilon u_2^a \ldots)^2 + \varepsilon^2 v_2^{a2}\right] \ldots + \frac{1 + \varepsilon(\kappa-1)Ma_\infty^2\, p_2 \ldots}{(\kappa-1)\, Ma_\infty^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{(\kappa-1)\, Ma_\infty^2} \qquad (24)$$

daraus folgt:

$$p_2 = -\, u_2^a \qquad (25)$$

d.h.,

$$p_2 = \frac{K_o(\beta\, p)}{\beta K_1(\beta\, p)}\, V(p) \qquad (26)$$

Das ist bisher erst die Lösung der gesuchten Funktionen in der Bildebene. Bei der Rücktransformation in die Objektebene wird nach WARD, um die Konvergenz der auftretenden Integrale zu erreichen, Gleichung (26) wie folgt umschrieben:

$$p_2 = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{K_1(\beta\, p) - K_o(\beta\, p)}{K_1(\beta\, p)}\right) V(p) \qquad (27)$$

unter Verwendung des Faltungssatzes wird daraus

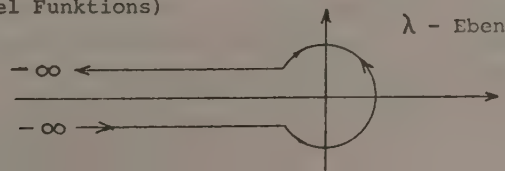
$$p_2 = \frac{1}{\beta}\left\{\underline{v_\infty^i(x)} - \frac{1}{\beta}\int_o^x W\left(\frac{x-s}{\beta}\right)\, v_\infty^i(s)\, ds\right\} \qquad (28)$$

mit der Gleichung für die Rücktransformation:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{K_1(\lambda) - K_o(\lambda)}{K_1(\lambda)}\, e^{\lambda z}\, d\lambda; \qquad z = \frac{x}{\beta} \qquad (29)$$

λ: komplexe Variable

Da die singulären Punkte des Integranden auf der negativen reellen Achse von λ liegen, ist der Integrationsweg bei der Lösung des Integrals nach Residuenmethode: (G.N. WATSON, Theory of Bessel Funktions)



Die gesuchte Funktion $W(\frac{x}{\beta})$ ist dabei der Realteil des Integrals (29) über die 3 Streckenabschnitte in der angegebenen Richtung. Leider ist es nicht möglich, das Integral wegen des komplizierten Aufbaus des Integranden geschlossen zu lösen.

Es bleiben 3 Möglichkeiten, zu einer Näherungslösung zu kommen. Zwei davon gehen von einer Reihenentwicklung des Integranden aus. Dazu sei gesagt, daß großen Werten von λ kleine z-Werte entsprechen und umgekehrt. Eine asymptotische Darstellung der Besselfunktionen für große Werte von λ liefert also eine Lösung W(z) für kleine z-Werte. Analog dazu ergibt die Reihenentwicklung des Integranden eine asymptotische Darstellung von W(z) für $z >> 1$.

Die dritte Möglichkeit ist die numerische Integration. Dazu wird unter Benutzung der Additionstheoreme für Besselfunktionen das Integral (29) umgeformt in ein solches mit reellem Integrationsweg (Rechengang s. WARD [26]). Das Resultat

$$W(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda z}}{K_1^2(\lambda) + \pi^2 I_1(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad . \tag{30}$$

I_1 = Besselfunktion mit rein imaginärem Argument und ganzzahligem Index ("1")

läßt sich leicht numerisch integrieren.

In dieser Arbeit ist die 1. Methode, die auf eine Potenzreihendarstellung für W(z) führt, angewendet worden, weil sich eine analytische Darstellung von W bei der numerischen Lösung der Differentialgleichungen leichter handhaben läßt und auch weniger Kernspeicherplatz im Rechner benötigt. Der Nachteil, der in der Begrenzung des Gültigkeitsbereichs für kleine z ($z < 2$, z hier reell) liegt, macht sich nicht bemerkbar. Wegen der durch das Ausblasen bewirkten Ablösung der Grenzschicht kann man ohnehin nur eine Lösung des gesamten Problems für $x \leq x_s$ (x_s = Ablösepunkt) finden; x_s ist aber viel kleiner als der Konvergenzradius von W. Dies gilt nur nicht mehr für Machzahlen nahe eins und - nach der Transformation mit Gleichung (50) - sehr kleine Ausblaseparameter, wie aus dem Zusammenhang z mit der Machzahl und Gleichung (50b) sofort abzulesen ist.

Die Reihendarstellung sollte mit möglichst wenig Gliedern einen möglichst großen Gültigkeitsbereich haben. Nimmt man wegen des alternierenden Charakters der Reihen das arithmetische Mittel der beiden Potenzreihen vom Grade 5 und 6 für W, so zeigt sich, daß der Gültigkeitsbereich des resultierenden Polynoms erheblich größer ist als der der einzelnen Polynome. Sogar für den theoretischen Konvergenzradius der Reihenentwicklung erhält man damit noch brauchbare Funktionswerte. Zu dieser Beurteilung kommt man durch Vergleich mit dem Ergebnis aus der numerischen Integration von (30), die sich für alle Werte $z \geq 0$ durchführen läßt. Die Darstellung für W(z) ($z = \frac{x}{\sqrt{Ma_\infty^2-1}}$) ist dann (s. auch [26]):

$$W(z) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\,z + \frac{3}{16}\,z^2 - \frac{21}{256}\,z^3 + \frac{9}{256}\,z^4 - \\ - 0{,}015454\,z^5 + 0{,}003511\,z^6 - \ldots \qquad (31)$$

Der Druck p_2 an der Wand ist damit nach Gleichung (28) als Funktion von x bekannt. Er setzt sich additiv aus zwei Termen zusammen. Der erste, $\frac{1}{\beta}\,v_\infty^i(x)$, ist die Lösung für die ebene Platte, die Ackeret'sche Gleichung. Der zweite Term, das Integral über das Faltprodukt, gibt den Einfluß der transversalen Krümmung auf die Verdrängungswirkung wieder. Er ist der Kopplungsterm der beiden Effekte, Verdrängung und Querkrümmung; er verschwindet, wenn einer der beiden Effekte null wird. Für die hier untersuchte Strömung außerhalb eines Zylinders ist das Integral in Gleichung (28) immer positiv. Das bedeutet, die Störung der Außenströmung ist beim Zylinder kleiner als bei der ebenen Platte. Für die Strömung im Innern des Zylinders hätte die Querkrümmung gerade die entgegengesetzte Wirkung.

Mit Hilfe des Druckverlaufs an der Wand kennt man dort auch die übrigen gesuchten Strömungsgrößen: Die Geschwindigkeit $u_2^a(x, y=0)$ folgt aus Gleichung (25) und die Temperatur $T_2^a(x, y=0)$ aus der linearisierten Energiegleichung oder der isentropen Zustandsgleichung.

$$T_2^a = (\kappa-1)Ma_\infty^2 p_2 \qquad (32)$$

Damit sind alle Größen der Außenströmung, die für die Lösung der Differentialgleichungen für die 2. Näherung der Grenzschicht benötigt werden, bekannt.

Die Strömung in der Grenzschicht

(Innenlösung)

Wie bei singulären Störungsrechungen erforderlich, wird hier die y-Koordinate gestreckt, damit die Abmessungen des Lösungsgebietes wieder von gleicher Größenordnung sind. Bei der Grenzschicht ist dieser Streckungsfaktor $\varepsilon = Re^{-\frac{1}{2}}$. Da die Ausblasgeschwindigkeit $v_w = O(\varepsilon)$ sein soll, ist auch $v = O(\varepsilon) = \varepsilon v^i$. Die Differentialgleichungen (1) bis (4) für die Grenzschicht lauten dann nach der Koordinatenstreckung in dimensionsloser Darstellung in den Koordinaten

$$\bar{x} = x \,, \quad \bar{y} = \frac{y}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\rho^i u^i) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}(r\rho^i v^i) = 0 \qquad r = 1+\varepsilon\bar{y} \qquad (33)$$

$$\rho^i\left(u^i\frac{\partial u^i}{\partial \bar{x}} + v^i\frac{\partial u^i}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial p^i}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\mu^i\frac{\partial u^i}{\partial \bar{y}}\right) + \varepsilon\frac{\mu^i}{r}\frac{\partial u^i}{\partial \bar{y}} + O(\varepsilon^2) \qquad (34)$$

$$\frac{\partial p^i}{\partial \bar{y}} = O(\varepsilon^2) \qquad (35)$$

$$\rho^i\left(u^i\frac{\partial T^i}{\partial \bar{x}} + v^i\frac{\partial T^i}{\partial \bar{y}}\right) = (\kappa-1)Ma_\infty^2\left(u^i\frac{\partial p^i}{\partial \bar{x}} + v^i\frac{\partial p^i}{\partial \bar{y}}\right) + \frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\lambda^i\frac{\partial T^i}{\partial \bar{y}}\right)$$

$$+ \varepsilon\frac{\lambda^i}{rPr}\frac{\partial T^i}{\partial \bar{y}} + (\kappa-1)Ma_\infty^2\cdot\mu^i\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{y}}\right)^2 + O(\varepsilon^2) \qquad (36)$$

Nur die für die weitere Entwicklung relevanten Glieder sind in den Gleichungen ausgeschrieben. Pr ist die Prandtlzahl $Pr = \frac{c_p \mu_\infty}{\lambda_\infty} = \text{konst.}$
Die Randbedingungen sind: $(\bar{x} \geq 0)$

$$\bar{y} = 0 : \quu^i = u_w$$
$$v^i = v_w$$
$$T^i = T_w$$

$$\bar{y} \to \infty : \quu^i \to u^a(y=0)$$
$$T^i \to T^a(y=0)$$

Der Druck p^i ist für die beiden ersten Näherungen nicht von $\bar{y}$ abhängig, wie man an Gleichung (35) erkennt. Folglich ist $p^i(\bar{x}) = p^a(x,y=0)$. Wie bei der Berechnung der Außenströmung werden die abhängigen Variablen nach ε entwickelt.

$$u^i = u_1^i + \varepsilon u_2^i + \ldots \qquad T^i = T_1^i + \varepsilon T_2^i + \ldots$$

$$v^i = v_1^i + \varepsilon v_2^i + \ldots \qquad \mu^i = \mu_1^i + \varepsilon \mu_2^i + \ldots$$

$$p^i = p_1^i + \varepsilon p_2^i + \ldots \qquad \lambda^i = \lambda_1^i + \varepsilon \lambda_2^i + \ldots$$

$$\rho^i = \rho_1^i + \varepsilon \rho_2^i + \ldots$$

Nach dem oben gesagten ist $p_1^i = 0$ und $p_2^i = p_2^a(y=0)$. Geht man mit diesem Ansatz in das Differentialgleichungssystem und ordnet nach Potenzen von ε, so folgt

1. Näherung

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\rho_1^i u_1^i) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\rho_1^i v_1^i) = 0 \tag{37}$$

$$\rho_1^i u_1^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{x}} + \rho_1^i v_1^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\mu_1^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}}\right) \tag{38}$$

$$\rho_1^i (u_1^i \frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{x}} + v_1^i \frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{y}}) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\lambda_1^i \frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{y}}) + (\kappa-1) Ma_\infty^2 \mu_1^i (\frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}})^2 \qquad (39)$$

mit

$$u_1^i = 0$$
$$v_1^i = v_{1w} \qquad \text{für } \bar{y} = 0 \text{ und}$$
$$T_1^i = T_{1w}$$

$$u_1^i = u_1^a = 1$$
$$T_1^i = T_1^a = 1 \qquad \text{für } \bar{y} \to \infty$$

Zustandsgleichung: $\rho_1^i T_1^i = 1$

Dies sind die Grenzschichtgleichungssysteme 1. Ordnung für die ebene Platte.

2. Näherung

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\rho_1^i u_2^i + \rho_2^i u_1^i) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\rho_1^i v_2^i + \rho_2^i v_1^i) + \rho_1^i v_1^i = 0 \qquad (40)$$

$$\rho_1^i (u_1^i \frac{\partial u_2^i}{\partial \bar{x}} + u_2^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{x}} + v_1^i \frac{\partial u_2^i}{\partial \bar{y}} + v_2^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}}) + \rho_2^i (u_1^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{x}} + v_1^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}}) \qquad (41)$$
$$- \frac{dp_2^i}{d\bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\mu_1^i \frac{\partial u_2^i}{\partial \bar{y}} + \mu_2^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}}) + \mu_1^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}}$$

$$\rho_1^i (u_1^i \frac{\partial T_2^i}{\partial \bar{x}} + u_2^i \frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{x}} + v_1^i \frac{\partial T_2^i}{\partial \bar{y}} + v_2^i \frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{y}}) + \rho_2^i (u_1^i \frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{x}} + v_1^i \frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{y}}) =$$

$$= (\kappa-1) Ma_\infty^2 u_1^i \frac{dp_2^i}{dx} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\lambda_1^i \frac{\partial T_2^i}{\partial \bar{y}} + \lambda_2^i \frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{y}}) +$$

$$+ 2(\kappa-1) Ma_\infty^2 \mu_1^i \frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}} \frac{\partial u_2^i}{\partial \bar{y}} + (\kappa-1) Ma_\infty^2 \mu_2^i (\frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}})^2 + \frac{1}{Pr} \lambda_1^i \frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{y}}$$

(42)

mit den Randbedingungen:

$$\bar{y} = 0 \qquad \begin{matrix} u_2^i = u_{2w}^i \\ v_2^i = \begin{cases} 0 \\ \neq 0 \text{ s. Gl. (54)} \end{cases} \\ T_2^i = 0 \end{matrix} \qquad \bar{y} \to \infty \qquad \begin{matrix} u_2^i = u_2^a(y=0) \\ \\ T_2^i = T_2^a(y=0) \end{matrix}$$

Jeweils der letzte Term in den Gleichungen (41) und (42) stellt den Krümmungseinfluß dar. Zusammen mit Gleichung (28) sind die einzelnen Einflußfaktoren des Krümmungs- und Verdrängungseffektes zu erkennen. Dabei geben die beiden unterstrichenen Terme in (41) und (42) den reinen Querkrümmungseinfluß wieder, während der erste Summand auf der rechten Seite von Gleichung (28) (gestrichelt) die reine Wirkung der Verdrängung ist, die das Gleichungssystem nur über die Randbedingungen beeinflußt. Der zweite Summand, das Integral des Faltungsproduktes, ist der gemischte Term aus Krümmungs- und Verdrängungseffekt.

Die verschiedenen Möglichkeiten für $v_2^i(\bar{y}=0)$ werden später näher erläutert.

Zustandsgleichung: $\kappa Ma_\infty^2 p_2^i = \rho_1^i T_2^i + \rho_2^i T_1^i$. (43)

Aus der Lösung der Gleichungssysteme erhält man dann die gesuchten Größen, den Schubspannungs- und Wärmeübergangsverlauf an der Wand.

Gleiten an der Wand

Bei Gasströmungen unter niedrigem Druck wird bekanntlich die Haftbedingung an einem festen Körper nicht mehr erfüllt [21],[30]. In diesem Bereich verdünnter Gasströmung sind die nach der Kontinuumstheorie, bei der die freie Weglänge der Moleküle gegenüber infinitessimalen Abmessungen des Fluids vernachlässigt wird, abgeleiteten Navier-Stokes Gleichungen unvollständig, da die freie Weglänge mit sinkendem Druck wächst und nicht mehr unberücksichtigt bleiben kann.

Als Folge davon treten im Spannungstensor und im Tensor für den Wärmestrom nichtlineare Glieder auf, die jedoch alle höchstens von der Ordnung $O(\frac{1}{Re})$ sind. Sie treten folglich in einer Entwicklungs nach $\frac{1}{\sqrt{Re}}$, wie sie hier durchgeführt wird, erst in der 3. Näherung für u und T auf. Außerdem ändern sich die Randbedingungen an einer festen Wand für die Geschwindigkeit und die Temperatur. Nach Maxwell [30] gilt an einer isothermen Wand

$$u_w^* = \gamma \cdot \ell^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)_w \qquad \text{und}$$

$$T_w^* - T_k^* = 1{,}996 \cdot \frac{2-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\kappa}{\kappa+1} \frac{1}{Pr} \ell^* \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)_w$$

In diesem Gleichungen bedeuten u_w^*, T_w^* die Geschwindigkeit bzw. Temperatur des Fluids an der Wand und T_k^* die Temperatur der Wand selbst. ℓ^* ist die freie Weglänge der Gasmoleküle. Der Gleitkoeffizient γ hängt im wesentlichen von der Beschaffenheit der Körperoberfläche ab und hat für Luft über Metall praktisch den Wert eins. Der Akkomodationskoeffizient α ist für Luft über Metall ebenfalls nur wenig kleiner als eins und wird hier eins gesetzt.

Natürlich taucht der Gleiteffekt in dem betrachteten Grenzschichtproblem auf keinen Fall in der 1. Näherung auf, da ja keine verdünnte Gasströmung angenommen wird. Man kann jedoch aus der einfachen kinetischen Gastheorie und für große Reynoldszahlen den Zusammenhang

$$\frac{\ell^*}{\delta^*} = 1{,}255\sqrt{\kappa}\,\frac{Ma_\infty}{\sqrt{Re}}$$

herleiten. δ^* ist dabei die Grenzschichtdicke; da δ^* proportional zu $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ ist, folgt, nachdem die beiden Gleichungen für u_w^* und T_w^* dimensionslos gemacht und nach ϵ entwickelt worden sind:

$$u_{1w}^i = 0; \quad u_{2w}^i = 1{,}255\sqrt{\kappa}\, Ma_\infty \left(\frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}}\right)_w \qquad (44)$$

und

$$T^i_{1w} = T_K \; ; \quad T^i_{2w} = 2{,}52 \cdot \frac{\kappa}{\kappa+1} \sqrt{\kappa} \, \frac{Ma_\infty}{Pr} \left(\frac{\partial T^i_1}{\partial y}\right)_w \qquad (45)$$

Für die 2. Näherung ist der Gleiteffekt von null verschieden.

Wandschubspannung:

Die Schubspannung wird in dimensionsloser Form dargestellt durch

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_\infty U_\infty^2} = \varepsilon \, \mu^i_w \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{y}}\right)_w$$

oder nach ε entwickelt:

$$\frac{1}{\varepsilon} C_f = C_{f_1} + \varepsilon \, C_{f_2} + \ldots = \mu_{1w} \left(\frac{\partial u^i_1}{\partial \bar{y}}\right)_w + \varepsilon \left\{ \mu^i_{1w} \left(\frac{\partial u^i_2}{\partial \bar{y}}\right)_w + \mu^i_{2w} \left(\frac{\partial u^i_1}{\partial \bar{y}}\right)_w \right\} + \ldots$$

(46)

Der zweite Term in der Klammer der 2. Näherung ist nur dann von null verschieden, wenn Gleiten an der Wand berücksichtigt wird. Im anderen Fall verschwindet er, da wegen der Randbedingungen für T^i_{2w} und der Termperaturabhängigkeit der Zähigkeit dann $\mu^i_{2w} = 0$ wird.

Der Wärmestrom an der Wand:

Der Wärmestrom an einer festen Wand, aus der ein Massenstrom $\dot{m}_w$ ausgeblasen wird, wird wie im Fall einer undurchlässigen Wand nur durch die Wärmeleitung wiedergegeben, wenn das ausgeblasene Fluid identisch ist mit dem äußeren, d.h., wenn es sich um ein Einstoffsystem handelt. Es gilt also

$$q_w = \lambda^i \left(\frac{\partial T^i}{\partial y^i}\right)_w$$

Tritt zusätzlich an der Wand Gleiten auf, so liefert die aufgrund des Gleitens verbrauchte Reibleistung einen weiteren Beitrag zum Wärmestrom.

Diese Aussage ist zuerst von MASLEN [14] gemacht worden. Nach anfänglichen Zweifeln und Diskussionen wurde die Überlegung auch allgemein anerkannt [24]. Die um den Term der "Gleitreibung" erweiterte Gleichung für den Wärmestrom lautet dann

$$q_w = (\lambda^i \frac{\partial T^i}{\partial y})_w + (\mu^i u^i \frac{\partial u^i}{\partial y})_w \qquad (47)$$

Gibt man den Wärmestrom durch die Stanton-Zahl wieder, so folgt aus (47) in dimensionsloser Form:

$$St = \frac{q_w}{\rho_\infty U_\infty c_p T_\infty} = \frac{\varepsilon}{Pr} \{\lambda_w^i (\frac{\partial T^i}{\partial \bar{y}})_w + Pr(\kappa-1)\, Ma_\infty^2 \mu_w^i u_w^i (\frac{\partial u^i}{\partial \bar{y}})_w\} \qquad (48)$$

Entwickelt man diese Gleichung in gleicher Weise nach dem Störparameter ε, so erhält man

$$\frac{1}{\varepsilon} St = St_1 + \varepsilon St_2 + \ldots = \frac{1}{Pr} \lambda_{1w}^i (\frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{y}})_w + \frac{\varepsilon}{Pr} \{\lambda_{1w}^i (\frac{\partial T_2^i}{\partial \bar{y}})_w + \lambda_{2w}^i (\frac{\partial T_1^i}{\partial \bar{y}})_w + Pr(\kappa-1)\, Ma_\infty^2 \mu_{1w}^i u_{2w}^i (\frac{\partial u_1^i}{\partial \bar{y}})_w\} + \ldots \qquad (49)$$

Bei Vernachlässigung des Gleiteffektes bleibt von den Termen der 2. Näherung nur der erste in der Klammer übrig, der die reine Wärmeleitung aufgrund des Temperaturgradienten 2. Ordnung darstellt.

Transformation:

Die Lösung der Differentialgleichungssysteme für die beiden Näherungen wird erschwert durch die Kopplung von Impuls- und Energiegleichung. Erfreulicherweise kann man aber wenigstens die Gleichungen für die 1. Näherung entkoppeln, wenn die Grenzschichtkoordinate $\bar{y}$ transformiert wird auf $\bar{\eta} = \int_0^{\bar{y}} \rho_1^i \, d\bar{y}$ und $\tilde{v}_1 = \rho_1 v_1 + u_1 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}$ als neue Geschwindigkeitskomponente einführt.

Die Transformation ist praktisch gleichzeitig von HOWARTH, DORODNIZYN und anderen angewendet worden.

Die Gleichungen für die 2. Näherung werden mit dieser Transformation nicht entkoppelt. Bisher gibt es keine Möglichkeit, mit ein und derselben Operation die Gleichungen für beide Näherungen zu entkoppeln.

Den Versuch, die Gleichungen 2. Ordnung für sich getrennt zu entkoppeln, kann man unterlassen. Da die Lösung nur numerisch durchgeführt werden kann, sind die Größen nur auf diskreten Punkten einer Koordinate bekannt. Die Funktionen der 1. Näherung sind nun die Koeffizienten in den Gleichungen 2. Ordnung. Es hätte also wenig Sinn, die Gleichungen für die 2. Näherung mit einer Transformation, die unabhängig von der der 1. Näherung ist, entkoppeln zu wollen, weil die Koeffizienten als Funktion dieser Transformierten Koordinate unbekannt sind.

Das Kopplungsproblem ist auch bei den Gleichungen der höheren Ordnung bezüglich der Iterationsschritte bei den numerischen Lösungsverfahren nicht mehr so gravierend, da die Gleichungen notwendigerweise linear sind.

Da nach der Grenzschichttheorie 1. Ordnung die Grenzschichtdicke an der Vorderkante mit $\sqrt{x}$ zu null geht, wird wegen der dadurch in den klassischen Grenzschichtgleichungen auftretenden Singularität bei x = 0 die Transformationgleichungen (50a) in der gewohnten Weise erweitert auf $\eta = \frac{\bar{\eta}}{\sqrt{x}}$.

Und um die wegen des Ausblaseterms auftretende instabile Tendenz der numerischen Lösung für das Gleichungssystem 1. Ordnung zu verhindern - es sei denn, man wählt unwirtschaftlich kleine Schrittweiten in x - Richtung -, wird die x - Koordinate so transformiert, daß sie für $x \ll 1$ gespreizt wird. Die entgültige Transformationsgleichungen sind:

$$\xi = \dot{m}_{1w}\sqrt{\frac{x}{C}} \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{C.x}} \int_0^{\bar{y}} \rho_1 d\bar{y} \qquad (50b)$$ +

dabei ist $\dot{m}_{1w} = \frac{\rho^*_{1w}\, v^*_{1w}}{\rho_\infty\, U_\infty} \cdot \sqrt{\frac{U_\infty R_0}{\nu_\infty}} = O(1)$ das Verhältnis der stromdichten des ausgeblasenen und des ankommenden Fluids dividiert mit dem Störparameter.

$C = \rho_1 \cdot \mu_1$ = Konst. ist der im Anhang näher diskutierte Chapman - Rubesin Parameter.

Damit treten der Ausblaseparameter und der Chapman - Rubesin Parameter in den Differenzialgleichungen explizit nur noch im Krümmungsterm der Gleichungen 2. Näherung und in der Ward'schen Funktion auf. Die numerischen Lösungen der 1. Näherung und die der 2. Näherung für die ebene Platte sind bezüglich dieser beiden Parameter allgemein.

Mit diesen Voraussetzungen lauten nun die Gleichungssysteme: (der Index "i" für die Innenlösung wird im Folgenden weggelassen, da keine Verwechslungen möglich sind.)

+ Bei den Transformationsgleichungen ist darauf zu achten, daß sie nur Größen 1. Ordnung enthalten und nicht auch Terme höherer Ordnung (bezügl. ε). Sonst ist das Verfahren gemäß der v.Dyke'sch u.U. nicht mehr konsistent.

1. Näherung ε^{o}:

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}\{\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi u_1)\, d\eta - \xi\}\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\xi u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = 0 \quad (51)$$

Energiegleichung:

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}\{\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi u_1)\, d\eta - \xi\}\frac{\partial T_1}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\xi u_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} = -(\kappa-1)Ma_\infty^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right)^2 \quad (52)$$

mit den Randbedingungen:

$$\xi \geq 0$$

$$\eta = 0 \quad : u_1 = 0,\ T_1 = T_{1w}$$
$$\eta \to \infty \quad : u_1 = 1,\ T_1 = 1$$

Die Geschwindigkeitskomponente v_1 senkrecht zur Wand in Gl.(38) ist dabei durch $\tilde{v}_1 = \rho_1 v_1 + u_1 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}$ (s. Howarth-Transformation Gl. (50a)) ersetzt worden. Nach Integration der transformierten Kontinuitätsgleichung (37) wird $\tilde{v}_1$ in der Bewegungsgleichung, durch

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_{1w}\left[1 + \frac{\eta}{2\xi}u_1 - \frac{1}{2\xi}\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi u_1)\, d\eta\right] \quad (53)$$

eliminiert; $\tilde{v}_{1w} = \rho_{1w} v_{1w} = \dot{m}_{1w}$

Das Gleichungssystem (51), (52) ist damit bis auf den Dissipationsterm in der Energiegleichung identisch mit dem für das analoge inkompressible Problem. Die Lösung von Gl. (51) stellt somit für Ausblasen die von Stewartson et al. [18] angegebene Lösung dar und für Absaugen die von Iglisch [7] . Im letzteren Fall muß dabei nur das negative Vorzeichen in der geschweiften Klammer in (51) geändert werden.

Der Schritt von den Gleichungen (38) und (39) zu (51) und (52) ist hier nicht in allen Einzelheiten wiedergegeben, da diese Transformation für die Gleichungen 1. Näherung in der Literatur

häufig zu finden ist (siehe z.B. [31]).

Für die Transformation der Differentialgln. der 2. Näherung bis zu der Form, von der schließlich die Differenzengleichungen gebildet werden, sind jedoch einige Zwischenschritte notwendig, die auf den folgenden Seiten dargestellt sind. Zunächst wird wegen der Abhängigkeit des Druckes p_2 von der Geschwindigkeit senkrecht zur Wand am Außenrand der Grenzschicht v_1 $(\eta \to \infty)$ aus der Lösung der 1. Näherung bestimmt.

$$v_1 = \frac{1}{\rho_1} \left(\tilde{v}_1 - u_1 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \right) \qquad (54)$$

$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}$ als Funktion von η, ξ ergibt: (unter Benutzung der Transformationsgl. u. der Zustandsgl

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} = - \frac{\dot{m}_{1w}}{2\xi} \left\{ \rho_1 \int_0^{\eta} \frac{2}{\partial \xi} (\xi T_1) \, d\eta - \eta \right\} \qquad (55)$$

mit Gl. (53) folgt dann:

$$\frac{\xi v_1}{\dot{m}_{1w}} = \bar{v}_1 = \xi T_1 - \frac{1}{2} T_1 \int_0^{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi u_1) \, d\eta + \frac{1}{2} u_1 \int_0^{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi T_1) \, d\eta \qquad (56)$$

und damit für $\eta \to \infty$:

$$\bar{v}_{1\infty} = \xi + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi (T_1 - u_1)] \, d\eta \qquad (57)$$

Der Druck p_2 ist nun(s.Gl. (28)):

$$p_2 = \frac{\dot{m}_{1w}}{\xi \beta} \left\{ \bar{v}_{1\infty} - \frac{2C}{\dot{m}_{1w}^2 \cdot \beta} \int_0^{\xi} W \left(\frac{\xi^2 - \sigma^2}{\frac{\dot{m}_{1w}^2}{C} \cdot \beta} \right) \cdot \bar{v}_{1\infty} \, d\sigma \right\} \qquad (58)$$

$C = \rho_1 \mu_1$

Da für $\xi = 0$ Gl. (57) $\bar{v}_{1\infty} \neq 0$ liefert, hat die Druckfunktion p_2 und damit auch die Bewegungs- und Energiegleichung für $\xi = 0$ eine Singularität (vgl. S. 36)

Um den Verlauf für u_2 und T_2 bei $\xi = 0$ berechnen zu können,

ist hier schon zu erkennen, daß dies nur für das Produkt $\xi \cdot u_2$ bzw. $\xi \cdot T_2$ möglich sein wird.

Elimination von v_2 aus der Bewegungs- und Energiegleichung ((38) und (39)):
In den Howarth-Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{\eta}$ ((50a)) lautet die 2. Näherung der Kontinui tätsgleichung ((37)):

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\rho_2 u_1 + \rho_1 u_2) + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\rho_2 u_1 + \rho_1 u_2) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\rho_2 v_1 + \rho_1 v_2)$$

$$+ \rho_1 v_1 = 0 \qquad (59)$$

Aus der Darstellung der Bewegungsgleichung (38) in $\bar{x}$, $\bar{\eta}$ ist sofort ersichtlich, daß die der "Howarth-Geschwindigkeit" $\tilde{v}_1$ in 1. Näherung entsprechende Substitution in der 2. Näherung

$$\tilde{v}_2 = \rho_1 v_2 + u_2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \qquad (60)$$

sein muß. Unter Zuhilfenahme des bekannten Ergebnisses der 1. Näherung

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \bar{\eta}} = 0$$

ergibt sich nach einigen Umrechnungen für Gl. (59):

$$\frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \bar{\eta}} + u_1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + v_1 \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + v_1 = 0 \qquad (61)$$

Die Integration dieser Gl. liefert $\tilde{v}_2$; dargestellt in den Koordinaten ξ, η resultiert:

$$\tilde{v}_2 = \tilde{v}_{2w} + \frac{\dot{m}_{1w}}{2\xi} \{ \eta u_2 - \int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi u_2) d\eta + \eta u_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} - \int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\left(\xi u_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) d\eta \} - \tilde{v}_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} + \left(\tilde{v}_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)_w - C \int_0^\eta \bar{v}_1 \, d\eta \qquad (62)$$

Den letzten Term in Gleichung (62) liefert die Integration von Gleichung (56). An der Wand sind $\tilde{v}_1$ und $\tilde{v}_2$ mit dem Massenstrom identisch.

$$\dot{m}_w = \rho_w v_w = \rho_{1w} v_{1w} + \varepsilon(\rho_{2w} v_{1w} + \rho_{1w} v_{2w}) + \cdots$$

$$= \dot{m}_{1w} + \varepsilon \left(\dot{m}_{1w} \cdot \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_w + \tilde{v}_{2w}\right) + \cdots$$

Der ausgeblasene Massenstrom soll konstant bleiben, d.h. $\dot{m}_w = \dot{m}_{1w}$. Folglich muß, da $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_w > 0$ ist,

$$\tilde{v}_{2w} = - \dot{m}_{1w} \cdot \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_w \qquad (63)$$

sein. Die zweite Möglichkeit, auf die bei den Randbedingungen der Gleichungen (38) und (39) verwiesen wurde, ist, $\tilde{v}_{2w} = 0$ zu setzen. In diesem Fall wäre die Ausblasegeschwindigkeit in 2. Näherung null, nicht aber der Massenstrom. Bei einem kompressiblen Fluid ist jedoch die Massenstromdichte entscheidender als die Geschwindigkeit. Daher wird als Randbedingung Gleichung (59) verwendet.

Wegen des schon erwähnten singulären Verhaltens der Dgln. für $\xi = 0$ und des im Kapitel 'Numerik' beschriebenen instabilen Verhaltens der numerischen Lösung, werden die abhängigen Variablen der 2. Näherung auf p_2 (ξ) bezogen. D.h. die Differentialgleichungen werden nicht für u_2 und T_2, sondern für $\frac{u_2}{p_2}$ und $\frac{T_2}{p_2}$ gelöst. Nach Gleichung (58) läßt sich die Druckfunktion $p_2 = \frac{f(\xi)\dot{m}_{1w}}{\xi}$ schreiben, wobei $f(\xi)$ eine für $\xi \geq 0$ nicht verschwindende Funktion ist (Ausdruck in der geschweiften Klammer von Gleichung (58)) und im wesentlichen durch die Ausblaseverteilung bestimmt wird.

Beachtet man noch, daß die bei der Transformation der Gleichungen (38) und (39) in den Reibungstermen auftretende Kombination $\rho_1 \mu_2$ bzw. $\rho_1 \lambda_2$ wegen der angenommenen linearen Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit ersetzt werden kann durch

$\rho_1 \mu_2 = \rho_1 \mu_1 \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} = C \cdot \frac{T_2}{T_1}$, so ergibt sich mit

$\bar{u}_2 = \frac{u_2}{p_2}$, $\bar{T}_2 = \frac{T_2}{p_2}$ und $\bar{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{p_2}$ die folgende Darstellung der

Bewegungs- und Energiegleichung in 2. Näherung: ($f' = \frac{df}{d\xi}$)

Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \eta^2} + (\frac{1}{2}\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi u_1)d\eta - \xi)\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \eta} + (\frac{1}{2}\xi \int_0^\eta \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi} d\eta + \frac{1}{2}\xi \frac{f'}{f}\int_0^\eta \bar{u}_2 d\eta)\frac{\partial u_1}{\partial \eta} -$$

$$- \frac{1}{2}\xi(u_1\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi} + \bar{u}_2\frac{\partial u_1}{\partial \xi}) + \frac{1}{2}(1-\xi\frac{f'}{f})\bar{u}_2 \cdot u_1 =$$

$$- \frac{1}{2}(1-\xi\frac{f'}{f})T_1 - \frac{1}{2}\xi\{\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \xi}(u_1\frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1})\,d\eta + \frac{f'}{f}\int_0^\eta (u_1\frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1})\,d\eta\}\frac{\partial u_1}{\partial \eta} +$$

$$+ \frac{1}{2}\xi\frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1}u_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{\bar{T}_2}{T_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u_1}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\bar{T}_2}{T_1}) -$$

$$- \frac{C^{3/2}}{\dot{m}_{1w}^2}\frac{\xi^2}{f}\{T_1 + \int_0^\eta \bar{v}_1\,d\eta\}\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \qquad (64)$$

Energiegleichung

$$\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \eta^2} + \{\frac{1}{2}\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi u_1)d\eta - \xi\}\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\xi u_1\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \xi} + \frac{1}{Pr}\frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{\bar{T}_2}{T_1}\frac{\partial T_1}{\partial \eta}) +$$

$$+ \{\frac{1}{2}(1-\xi\frac{f'}{f})u_1 + \frac{1}{2}\xi u_1\frac{\partial T_1}{\partial \xi} + (\kappa-1)Ma_\infty^2\frac{1}{T_1}\cdot(\frac{\partial u_1}{\partial \eta})^2\}\bar{T}_2 -$$

$$- \frac{1}{2}\xi\{\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \xi}(u_1\frac{\bar{T}_2}{T_1})d\eta + \frac{f'}{f}\int_0^\eta (u_1\frac{\bar{T}_2}{T_1})d\eta\}\frac{\partial T_1}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(\kappa-1)Ma_\infty^2(1-\xi\frac{f'}{f})u_1T_1$$

$$-2(\kappa-1)Ma_\infty^2\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{1}{2}\xi(\bar{u}_2 + \kappa Ma_\infty^2 u_1\frac{\partial T_1}{\partial \xi} -$$

$$\frac{1}{2}\xi\{\int_0^\eta \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \xi}d\eta + \frac{f'}{f}\int_0^\eta \bar{u}_2\,d\eta + \kappa Ma_\infty^2\int_0^\eta \frac{\partial u_1}{\partial \xi}d\eta + \kappa Ma_\infty^2\frac{f'}{f}\int_0^\eta u_1 d\eta\}\frac{\partial T_1}{\partial \eta} -$$

Fortsetzung der Energiegleichung:

$$- \frac{C^{3/2}}{\dot{m}_{1w}^2} \cdot \frac{\xi^2}{f} \left\{ \frac{1}{Pr} T_1 + \int_0^\eta \bar{v}_1 d\eta \right\} \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \qquad (65)$$

In der letzten Gleichung ist dabei das wie in der Bewegungsgleichung (64) auftretende Dichteverhältnis durch die 2. Näherung der Zustandsgleichung

$$\frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} = \kappa Ma_\infty^2 - \frac{\bar{T}_2}{T_1} \qquad (66)$$

ersetzt worden.
Die Randbedingungen des Systems sind :

$\xi \geq o$: $\eta = o$: $\bar{u}_2 = o$, $\bar{T}_2 = o$

$\eta \to \infty$: $\bar{u}_2 = -1$, $\bar{T}_2 = (\kappa-1)Ma_\infty^2$

Die Bedingungen für η=o gelten nur für Haften und ohne Temperatursprung an der Wand.
Tritt an der Wand ein Geschwindigkeits- und Temperatursprung auf, so gelten statt dessen die Randbedingungen :

$$\eta = o: \qquad \bar{u}_2 = a_1 \frac{Ma_\infty}{C\, f\, T_{1w}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right)_w \qquad (67a)$$

$$\bar{T}_2 = a_2 \cdot \frac{Ma_\infty}{C\, f\, T_{1w}} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right)_w \qquad (67b)$$

dabei ist $a_1 = 1{,}255 \sqrt{\kappa}$ und $a_2 = 2{,}52 \frac{\kappa}{\kappa+1} \sqrt{\kappa} \frac{1}{Pr}$

(vgl. Gl. (44),(45));
Die Schubspannung und der Wärmeübergang an der Wand sind nach Transformation der Gln. (46) und (49)

$$c_f(\xi) = \varepsilon \frac{\dot{m}_{1w}}{\xi} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \varepsilon \left[\frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] \cdots \right\}_w \qquad (68)$$

$$= c_{f1} + \varepsilon c_{f2} + \cdots$$

$$St = -\varepsilon \frac{\dot{m}_{1w}}{\xi Pr} \left\{ \frac{\partial T_1}{\partial \eta} + \varepsilon \left[\frac{\partial T_2}{\partial \eta} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \eta} + Pr(\kappa-1) Ma_\infty^2 u_2 \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right] \cdots \right\}_w$$

$$= St_1 + \varepsilon St_2 + \cdots \qquad (69)$$

In der zweiten Gleichung ist wegen der gleichen Temperaturabhängigkeit $\lambda=\mu$ gesetzt worden. Der Faktor vor der geschweiften Klammer ist in Gl.(68) der Verlauf der Wandschubspannung in 1.Näherung für die undurchlässige ebene Platte und in Gl.(69) der entsprechende Verlauf für den Wärmeübergang. Hier sei daraufhingewiesen, daß $\dot{m}_{1w}/\xi$ natürlich den Faktor $\dot{m}_{1w}$ nicht mehr enthält (vgl. Gl.(50b)).

Da $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\dot{m}_{1w}}{\xi} \cdot \frac{\bar{T}_2}{T_1}$ ist, folgt schließlich mit Gl.(67b),

$$c_{f10} = \varepsilon \frac{\dot{m}_{1w}}{\xi} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right)_{\substack{w \\ \xi=o}} \quad \text{und} \quad St_{10} = -\varepsilon \frac{\dot{m}_{1w}}{\xi Pr} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right)_{\substack{w \\ \xi=o}} :$$

$$\frac{c_f}{c_{f10}} = \bar{c}_{f1} + \varepsilon \bar{c}_{f2} + \cdots = \left\{ \frac{\frac{\partial u_1}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right)_{\xi=o}} + \varepsilon \frac{\dot{m}_{1w}^f}{\xi} \cdot \right.$$

$$\left. \left[\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \eta} + \frac{a_2 Ma_\infty}{C \cdot f \cdot T_{1w}^2} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] \frac{1}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right)_{\xi=o}} + \cdots \right\}_w \qquad (70)$$

und für den Wärmeüber gang ergibt sich:

$$\frac{St}{St_{10}} = \bar{St}_1 + \varepsilon\bar{St}_2 + \cdots = \{ \frac{\partial T_1}{\partial \eta} + \varepsilon \frac{\dot{m}_{1w} f}{\xi} [\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \eta} + \frac{Ma_\infty}{C \cdot f \cdot T_{1w}} (\frac{a_2}{T_{1w}} (\frac{\partial T_1}{\partial \eta})^2 + Pr(\kappa-1) Ma_\infty^2 a_1 (\frac{\partial u_1}{\partial \eta})^2)] \frac{}{(\frac{\partial T_1}{\partial \eta})_{\xi=o}} + \cdots \}_w$$

(71)

In beiden Gleichungen ist das bekannte singuläre Verhalten der 2. Näherung für Schubspannung und Wärmeübergang bei $\xi=o$ zu erkennen ($\sim 1/\xi^2$); d.h. das Integral von C_f bzw. St über x ($x \sim \xi^2$) wird für x=o unendlich. Dieses unrealistische Ergebnis gibt die Unzulänglichkeit des physikalischen Modells für die Vorgänge in der Strömung unmittelbar an der Vorderkante wieder. Ein Mangel, der natürlich bereits der klassischen Grenzschichttheorie 1. Ordnung anhaftet, der sich in den höheren Näherungen aber wesentlich stärker bemerkbar macht. Wie bereits erwähnt ist dies hier aber nicht von Bedeutung, da die Abweichung von der Wirklichkeit nur auf einen engen Bereich um die Vorderkante beschränkt ist (vgl. KUO,[11]) und hier nicht die Kräfte auf einen Körper oder der Gesamtwärmeübergang berechnet werden sollen.

Der jeweils zweite Term in den Ausdrücken für $\bar{C}_{f2}$ u. $\bar{St}_2$ (Gl.(70),(71) der proportional dem Ergebnis der 1. Näherung ist, ist nur dann von null verschieden, wenn ein Temperatursprung an der Wand auftritt ($T_{2w} \neq o$). Im anderen Fall ist T_{2w} und damit μ_{2w} null. Dieser Zusatzterm für $\mu_{2w} \neq o$ ist für den Wärmeübergang immer positiv (s. Gl. (71)), während er in der Gleichung (70) für die Schubspannung das Vorzeichen wechseln kann, je nach der Richtung des Wärmeflußes an der Wand aus der 1. Näherung.

Analytische Integration der Differentialgln. 2. Ordn. für $\xi=o$

Aufgrund des Faktors $\rho_1\mu_2$ im Reibungsterm der Erhaltungsgleichungen sind die Differentialgleichungen (41) u. (42) bzw. (64) u. (65) auch für $\xi=o$, die Vorderkante, nicht entkoppelt. Es ist jedoch möglich, das Gleichungssystem analytisch einmal zu integrieren. Aus (64) u. (65) findet man für $\xi=o$ sofort (alle auftretenden Differentiale $(\frac{\partial}{\partial\xi})_{\xi=o}$ sind beschränkt):

$$\frac{\partial^2\bar{u}_2}{\partial\eta^2} + \frac{1}{2}\int_o^\eta u_1 d\eta\,\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\eta} + \frac{1}{2}\bar{u}_2 u_1 = -\frac{1}{2}T_1 - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\bar{T}_2}{T_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right) \qquad (72)$$

$$\frac{1}{Pr}\cdot\frac{\partial^2\bar{T}_2}{\partial\eta^2} + \frac{1}{2}\int_o^\eta u_1 d\eta\,\frac{\partial\bar{T}_2}{\partial\eta} + \frac{1}{Pr}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\bar{T}_2}{T_1}\cdot\frac{\partial T_1}{\partial\eta}\right) + \{\frac{1}{2}u_1 +$$

$$(\kappa-1)Ma_\infty^2\frac{1}{T_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)^2\}\bar{T}_2 = \frac{1}{2}(\kappa-1)Ma_\infty^2 u_1 T_1 - 2(\kappa-1)Ma_\infty^2\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\eta} \qquad (73)$$

Die Randbedingungen sind die gleichen wie für Gl. (64) u. (65). Die Integration von Gl.(72) über η von o bis η unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergibt:

$$\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\eta} + \frac{1}{2}\bar{u}_2\int_o^\eta u_1 d\eta = -\frac{1}{2}\int_o^\eta T_1 d\eta - \frac{\bar{T}_2}{T_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial\eta} + \frac{\bar{T}_{2w}}{T_{1w}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)_w + \left(\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\eta}\right)_w \qquad (74)$$

und aus Gl.(67) folgt

$$\frac{1}{Pr}\cdot\frac{\partial\bar{T}_2}{\partial\eta} + \frac{1}{2}\bar{T}_2\int_o^\eta u_1 d\eta + (\kappa-1)Ma_\infty^2\int_o^\eta\frac{\bar{T}_2}{T_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)^2 d\eta + \frac{1}{Pr}\cdot\frac{\bar{T}_2}{T_1}\cdot\frac{\partial T_1}{\partial\eta} =$$

$$\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial\bar{T}_2}{\partial\eta}\right)_w + \frac{1}{Pr}\cdot\frac{\bar{T}_{2w}}{T_{1w}}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\eta}\right)_w + \frac{1}{2}(\kappa-1)Ma_\infty^2\{\int_o^\eta u_1 T_1 d\eta - 4\int_o^\eta\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\eta}d\eta\} \qquad (75)$$

Das Integral im letzten Term von Gl.(75) erhält man nach Multiplikation der Gl.(74) mit $\partial u_1/\partial\eta$ und anschließender Integration:

$$2\int_o^\eta \frac{\partial u_1}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\eta}\,d\eta = u_1\left(\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\eta}\right)_w + \bar{u}_2\frac{\partial u_1}{\partial\eta} - \frac{1}{2}u_1\int_o^\eta T_1 d\eta + \frac{1}{2}\int_o^\eta u_1 T_1 d\eta$$

$$- \int_o^\eta \frac{\bar{T}_2}{T_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)^2 d\eta + \frac{\bar{T}_{2w}}{T_{1w}}u_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)_w - \bar{u}_{2w}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)_w \qquad (76)$$

Dabei ist die Bewegungsgleichung der 1. Näherung für

$\xi=o$: $\quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2} + \frac{1}{2}\int u_1 d\eta \frac{\partial u_1}{\partial\eta} = o$ berücksichtigt worden.

Für den Grenzübergang $\eta \to \infty$ folgt aus Gl.(74)

$$\left(\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\eta}\right)_w = -\lim_{\eta\to\infty}\left\{\int_o^\eta u_1 d\eta - \frac{1}{2}\int_o^\eta T_1 d\eta\right\} - \frac{\bar{T}_{2w}}{T_{1w}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)_w \qquad (77)$$

Nach Einsetzen von Gl.(76) und (77) in Gl.(75) heben sich die noch unbekannten Integrale gegenseitig auf und für $\eta\to\infty$ erhält man

$$\left(\frac{\partial\bar{T}_2}{\partial\eta}\right)_w = -\left\{\frac{\bar{T}_{2w}}{T_{1w}}\left(\frac{\partial T_1}{\partial\eta}\right)_w + Pr(\kappa-1)Ma_\infty^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)_w\bar{u}_{2w}\right\} \qquad (78)$$

Für die Schubspannung und den Wärmeübergang an der Wand der 2. Näherung ergibt sich damit

$$\frac{c_{f2}}{c_{f10}} = -p_2(\xi=o)\cdot\lim_{\eta\to\infty}\left\{\int_o^\eta u_1 d\eta - \int_o^\eta T_1 d\eta\right\} \qquad (79)$$

und

$$St_2(\xi=o) = 0 \qquad (80)$$

An der Vorderkante wird also die Schubspannung bis zur 2. Näherung durch den Gleiteffekt nicht beeinflußt, und der Wärmeübergang in 2. Näherung verschwindet an der Vorderkante völlig. Dies steht in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von MASLEN [14] und GERSTEN & GROSS [5](jeweils ohne Ausblasen). In den beiden Arbeiten sind auch die Grenzschichtgleichungen 2. Ordnung entkoppelt, da eine Grenzschichtkoordinate (analog zu Gl.(50b)) eingeführt wurde, die nicht frei von dem Störparameter $\varepsilon=Re^{-1/2}$ ist.
Die Verwendung einer von ε unabhängigen Transformation (Gl.(50b)) führt folglich direkt an der Vorderkante zu keinem neuen Ergebnis. Ein Vergleich für Werte $\xi>o$ war nicht möglich (vgl. Angaben der Literaturübersicht in der Einleitung).

Teil C

Variationsbereich und Zahlenwerte der Parameter für die numerische Rechnung

Folgende Parameter beeinflussen die Lösung der Differentialgleichungen (51), (52), (64), (65): die Prandtl-Zahl Pr, die Machzahl Ma_∞ , das Verhältnis der spezifischen Wärmen κ, das Temperaturverhältnis $T_w = T^*_{wand} / T_\infty$, der ausgeblasene Massenstrom $\dot{m}_{1w} = \dot{m}_w / \sqrt{Re}$, der Chapman-Rubesin Parameter C und die Koeffizienten α und γ (vgl. S. 32)bei Geschwindigkeits- und Temperatursprung an der Wand.
Der Zylinderradius erscheint explizit nicht mehr in den Gleichungen, da er als Bezugsgröße für alle geometrischen Größen verwendet worden ist.
Die Zahlenwerte der Parameter für die numerische Rechnung sind: Pr = 0,72; κ = 1,4; C = 1 (s. Anhang); $Ma_\infty = \sqrt{2}$, 2,3,4; T_w = 0,1; 0,5; 1, 2, 3, 4; $\dot{m}_{1w}$ = 0,5; 1; 2.
Die Rechnungen für die Parameterkombinationen sind jeweils für den Kreiszylinder und die ebene Platte durchgeführt worden, um den Einfluß von Querkrümmung und Verdrängung zu separieren. α und γ weichen nur wenig von eins ab [21] und sind hier eins gesetzt worden. Auf allen Bildern ist mit T_w immer T_{1w} gemeint. In 1. Näherung sind Wandtemperatur und Temperatur des Gases an der Wand T_{1w} stets identisch, während das in 2. Näherung nur für den Fall gilt, daß kein Temperatursprung auftritt.
Es sei hier noch einmal erwähnt, daß die Energiegleichung (52) für die Grenzschichtrechnung 1. Ordnung aufgrund der Transformation mit Gl. (50 b) explizit nur noch von Pr, κ, Ma_∞ und T_w abhängt, während $\dot{m}_{1w}$ und C nur im Krümmungsterm der Differentialgleichungen der 2. Näherung (64), (65) und in der Ward'schen Funktion (58) vorkommen.

Einzelheiten zur Numerik und Lösungsschema sind im Anhang zu finden.

Ergebnisse der numerischen Rechnung mit Diskussion

Experimentelle Untersuchungen einer Strömung, wie sie für die Rechnung hier zugrunde gelegt wurde, gibt es noch nicht. Daher ist ein Vergleich der Ergebnisse mit Meßwerten nicht möglich. Ebenso fehlt die Möglichkeit, andere theoretische Arbeiten zur Überprüfung heranzuziehen, da bisher niemand eine Grenzschicht höherer Ordnung bei Ausblasen mit konstanter Massenstromdichte berechnet hat. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz der Lösungsmethode, die in den bisherigen Arbeiten zur Grenzschicht 2. Ordnung verwendet wurde (vgl. Tabelle in der Einleitung). Denn die dort benutzte Reihenentwicklung der Differentialgleichungen 2. Ordnung um die Vorderkante schließt die Erfassung einer Grenzschichtablösung weiter stromabwärts aus.
Die einzige Möglichkeit, das Verfahren zu prüfen, ist ein Vergleich der Lösung für die Vorderkante mit Angaben aus der Literatur ([5],[14]). Hier zeigt sich volle Übereinstimmung. Bei der Besprechung der einzelnen Bilder wird noch einmal darauf hingewiesen werden.
Der Vergleich für $\xi > o$ einer Testrechnung für $\dot{m}_{1w} = o$ (undurchlässige Wand) mit Literaturwerten ist nicht befriedigend, da bei Übereinstimmung der Ergebnisse bei $\xi=o$ eine Abweichung im weiteren Verlauf keine Information darüber gibt, ob diese Differenz aufgrund eines fehlerhaften Ergebnisses der vorliegenden Arbeit auftritt oder ob die Lösung nach der Reihenentwicklung nicht mehr genau genug ist. Außerdem ist nichts über den Konvergenzradius der Polynome bekannt.

1. Näherung (kompressible klassische Grenzschicht)

Natürlich sind die meisten der hier erhaltenen Ergebnisse der Grenzschichtrechnung 1. Ordnung bekannt. Um jedoch die Lösungen für die 2. Näherung zu verdeutlichen, sind auf den Bildern 1 - 4 einige wesentliche Zusammenhänge dargestellt.

Da die Krümmung keinen Einfluß auf die Gleichungen der 1. Näherung hat, stellen die Ergebnisse die Lösung für die ebene Platte dar.

Bild 1 zeigt den Verlauf der Verdrängungsdicke δ für eine Grenzschicht mit und ohne Massenzufuhr über der Lauflänge x. Für den Ausblasefall weicht die Kurve sehr schnell beträchtlich von derjenigen ohne Ausblasen ab und läuft für $x = x_{s1}$, der Ablösestelle 1. Ordnung, asymptotisch gegen unendlich. Dieses Anwachsen über alle Grenzen ist so zu verstehen, daß der Bereich $\delta = o\,(Re^{-1/2})$, für den die Darstellung gilt, verlassen wird und δ für $x \to x_s$ bezüglich der Reynoldszahl Re größenordnungsmäßig zunimmt (s.S. 11 und [9]). Der Ablösepunkt $x_{s1} = o{,}745$ ([18]) für $\dot{m}_{1w}=1$ und $C = 1$ verlagert sich natürlich mit $\dot{m}_{1w}$ und $C \neq 1$. Die Lösung von Gleichung (51) liefert jedoch unabhängig vom Zahlenwert für $\dot{m}_{1w}$ und C den Abszissenwert für die Ablösestelle $\xi_{s1} = o{,}863$. Mit der Definition von ξ aus Gl.(5ob) folgt damit sofort

$$x_{s1} = \xi_{s1}^2 \frac{C}{\dot{m}_{1w}^2} = o{,}745 \frac{C}{\dot{m}_{1w}^2}$$

Bild 1 läßt noch offen, ob die Grenzschicht bei $x = x_{s1}$ wirklich ablöst, oder ob sie einfach sehr stark aufgeweitet wird, d.h., daß die Gradienten der Strömungsgrößen über die Grenzschicht hinweg einfach flacher werden.

Die Antwort liefert *Bild 2*. Hier ist die Schubspannung in der Grenzschicht über der Grenzschichtkoordinate η (Gl.5ob) aufgetragen bei Annäherung an die Ablösestelle ($\Xi\tau_w = o$ bzw. $\tau_w = o\,(Re^{-1/2})$, vgl. S.10).

Wie man sieht, werden die Kurven unter Beibehaltung ihrer Form bei kleiner werdendem Abstand vom Ablösepunkt nach größeren η-Werten verschoben. Die eigentliche Scherschicht wird folglich nicht aufgeweitet, sondern fast ohne Änderung ihres Einflußbereiches von der Wand (η=o) abgedrängt.

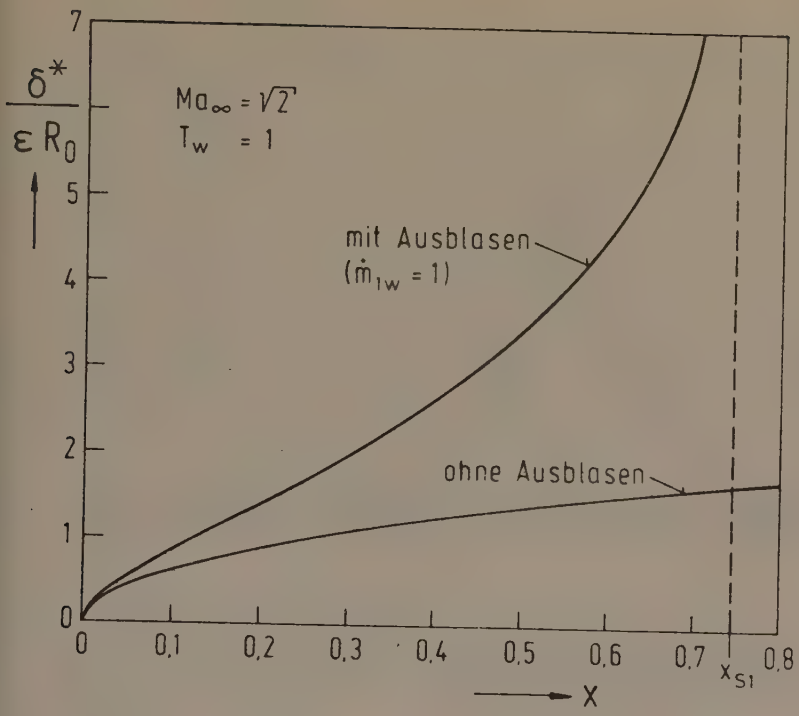


Bild 1 Verdrängungsdicke 1.Ordnung (eb. Platte)

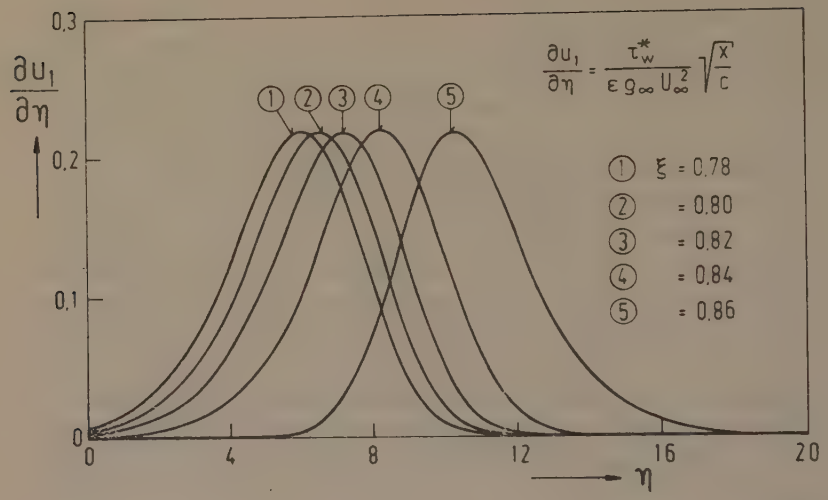


Bild 2 Schubspannungsprofile in der Nähe des Ablösepunktes

Die *Bilder 3 und 4* geben die Schubspannung und den Wärmeübergang an der Wand bis zum Ablösepunkt wieder. Dabei ist nach Gl. (51) der Verlauf für die Wandschubspannung auf Bild 3 unabhängig von Parametern. Das Ergebnis ist identisch mit dem von Stewartson et al. [18] . Das auf Seite 10 beschriebene Verhalten der Schubspannung bei Ablösung infolge Massenzufuhr, das monotone Abnehmen von Funktionswert und Gradient ist offensichtlich.

Der Wärmeübergang auf Bild 4, der in [18] nicht behandelt worden ist, läßt sich nach Gl. (52) nicht mehr parameterfrei darstellen. Vier der hier möglichen Kombinationen für T_w und Ma_∞ sind in Bild 4 als Kurven dargestellt. Die Kurven für die restlichen Kombinationen liegen innerhalb der abgebildeten Kurvenschar. Die Abnahme des Wärmeübergangs

auf Null ist natürlich eine unmittelbare Folge der Ablöseerscheinung der Grenzschicht. Da der Geschwindigkeitsgradient sein Maximum - außer an der Vorderkante - nicht an der Wand (s.Bild 2), sondern erst in einer gewissen Entfernung davon erreicht, haben die Aufheizung der Grenzschicht durch Dissipation und die Wandtemperatur für $T_w > 1$ eine entgegengesetzte Wirkung auf die Richtung des Wärmeübergangs an der Wand (s. auch Gl. für St_{1o} auf Bild 4).Er kann bei geeigneter Wahl von T_w und Ma_∞ durchaus Null werden [5].
Wenn der Wärmeübergang an der Vorderkante verschwindet ($St_{1o} = o$), bleibt er auf der ganzen Strecke bis zum Ablösepunkt Null, da die Kurven nach Bild 4 auch für die nicht eingezeichneten Kombinationen Ma_∞ und T_w keinen Abschnitt mit positiver Steigung haben.
Von den 4 Kurven in Bild 4 stellt die für $T_w = Ma_\infty = 4$ den absolut gesehen geringsten Wärmeübergang dar.

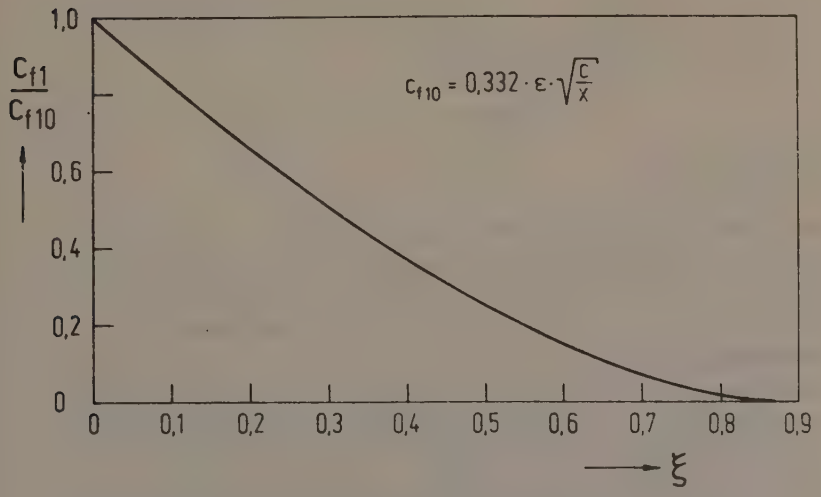


Bild 3 Wandschubspannung 1.Ordnung

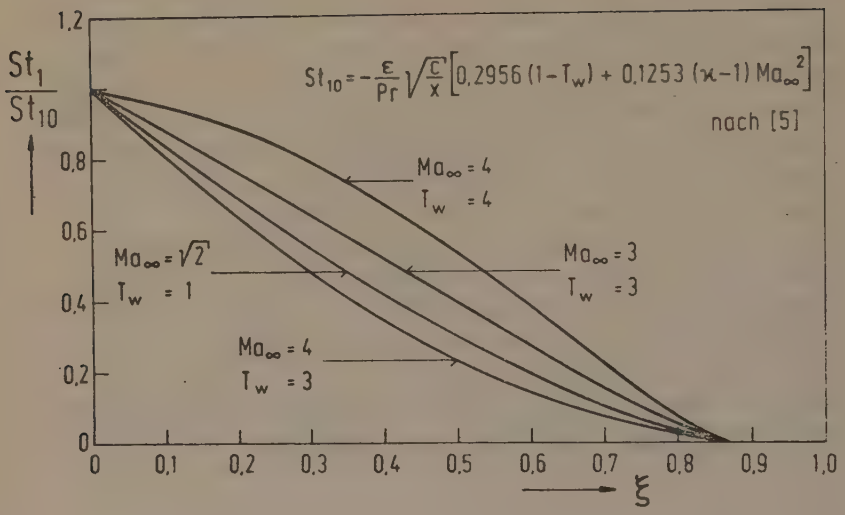


Bild 4 Wärmeübergang 1.Ordnung

2. Näherung

Faßt man die Verdrängungsschicht in Bild 1 als feste Wand auf, dann kann man sich nach der linearisierten Theorie für eine Überschallströmung leicht überlegen, daß der induzierte Druck p_2 der Außenströmung von der Vorderkante bis zum Wendepunkt der Kurve für δ abnimmt und anschließend wieder zunimmt.

Aufgrund der Form der Verdrängungsschicht ist der Druckverlauf in der Nähe der Vorderkante $p_2 \sim 1/\sqrt{x}$. Dieses unrealistische singuläre Verhalten, das wegen der Linearisierung der Außenströmung und damit der Vernachlässigung eines Verdichtungsstoßes und dessen Wechselwirkung mit der Grenzschicht auftritt, ist aber nur auf die unmittelbare

Umgebung der Vorderkante begrenzt (vgl. [11]).
Das Verhalten insbesondere im Bereich der Ablösung ist davon unbeeinflußt.

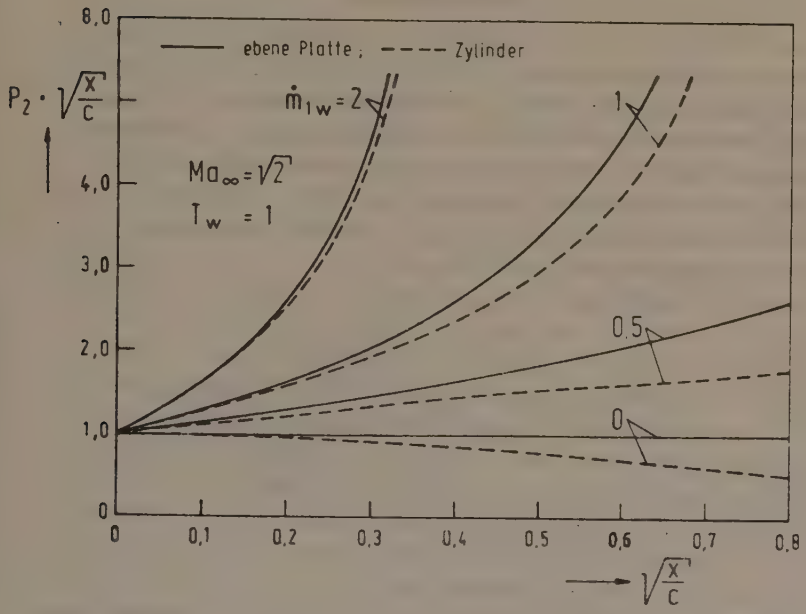


Bild 5: Verlauf des induzierten Druckes p_2, bezogen auf $\sqrt{\frac{x}{c}}$ für ebene Platte und Kreiszylinder bei unterschiedlich starker Massenzufuhr.

Bild 5 zeigt den auf $\sqrt{\frac{x}{c}}$ bezogenen Druckverlauf für die ebene Platte und den Kreiszylinder für den Fall ohne Ausblasen und für Ausblaseparameter $\dot{m}_{1w}$ = 0,5;1 und 2. Mit größerer Massenzufuhr wird der Einfluß der Querkrümmung auf den induzierten Druck im Vergleich zur Verdrängungswirkung immer geringer. Für die undurchlässige ebene Platte erhält man die reine $\sqrt{x}$-Abhängigkeit. Deutlich wird am Druckverlauf auch die rasche Abnahme der Strecke bis zur Ablösung mit steigender Massenzufuhr. Die Kurven beginnen übrigens nicht exakt mit

dem Funktionswert 1, sondern mit 0,975; sie sind also nicht auf den Funktionswert bei x = o normiert.

Grenzschicht 2. Ordnung ohne Gleiten und Temperatursprung an der Wand und $\dot{m}_{1w} = 1$

Die Ergebnisse für die 2. Näherung der Grenzschichtrechnung zeigen die dominierende Rolle des induzierten Druckes auf die Vorgänge in der Grenzschicht. Im Bereich abnehmenden Druckes wird die Strömung in Wandnähe in der Grenzschicht beschleunigt (vgl. auch Bild 34). Nachdem der Druck seinen minimalen Wert erreicht hat und ansteigt, wird die Strömung verzögert. Dieses Verhalten spiegelt sich in der Darstellung der Wandschubspannung 2. Näherung auf *Bild 6* wieder.

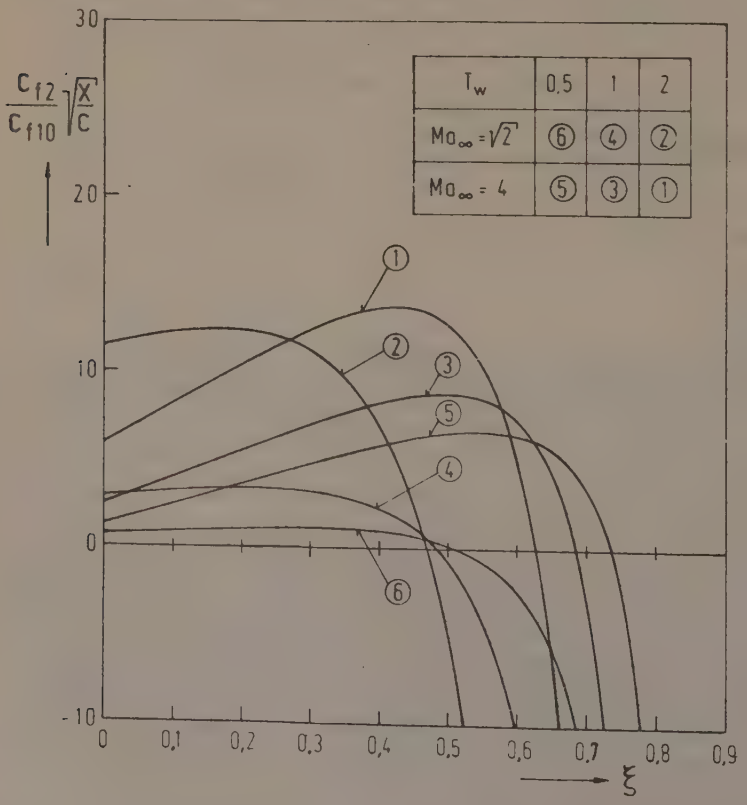


Bild 6: Wandschubspannungskoeffizient 2. Ordnung für die ebene Platte, $\dot{m}_{1w} = 1$

In dem ξ-Bereich auf Bild 6, der jeweils zu dem Kurvenabschnitt mit positiven Funktionswerten gehört, ist die Geschwindigkeit der 2. Näherung in Wandnähe positiv. Hinter dem Nulldurchgang der Wandschubspannung stellt sich eine Rückströmung ein. Man erkennt die qualitative Ähnlichkeit des Wandschubspannungsverlaufs der 2. Näherung mit dem eingangs (S.10) erwähnten Ablöseverhalten aufgrund eines positiven Druckgradienten in der 1. Näherung der Außenströmung. Natürlich beeinflußt der ausgeblasene Massenstrom auch die Wandschubspannung in 2. Näherung, aber ganz offensichtlich dominiert der Einfluß des induzierten Druckes, denn im Gegensatz zur 1. Näherung wächst zu kleineren Funktionswerten hin die Steigung der Kurven für die Wandschubspannung absolut genommen stark an. Am unteren Rand von Bild 6 haben die Kurven zwar unterschiedliche Steigung, aber alle streben erst für $\xi \to \xi_{s1}$ gegen unendlich. Dies gilt auch für die noch folgenden Darstellungen der Wandschubspannung beim Kreiszylinder und des Wärmeübergangs (*Bild 7,8,9*). Die Maxima der Kurven auf Bild 6 fallen nicht mit den Maxima des Druckes $p_2(\xi)$ zusammen, die für alle Werte von Ma_∞ und T_w in unmittelbarer Umgebung von $\frac{1}{2}\xi_{s1}$ liegen. Der Verlauf von $p_2(\xi)$ ist nahezu symmetrisch zu diesem Abszissenwert und strebt für $\xi \to 0$ und $\xi \to \xi_{s1}$ gegen unendlich. Aus Bild 5 erkennt man jedoch, daß $p_2(\xi)$ für $\xi \to \xi_{s1}$ stärker als mit $\sqrt{x}$ anwächst. Mit kleinerer Wandtemperatur T_w sinkt auch der Funktionswert für das Druckminimum und die Kurve wird kastenförmiger. In größeren Machzahlen M_∞ hin verändert sich das Niveau des Druckverlaufs kaum, aber die Symmetrie wird in der Weise gestört, daß der Druck p_2 nach dem Minimum mit steigenden Machzahlen schwächer zunimmt.

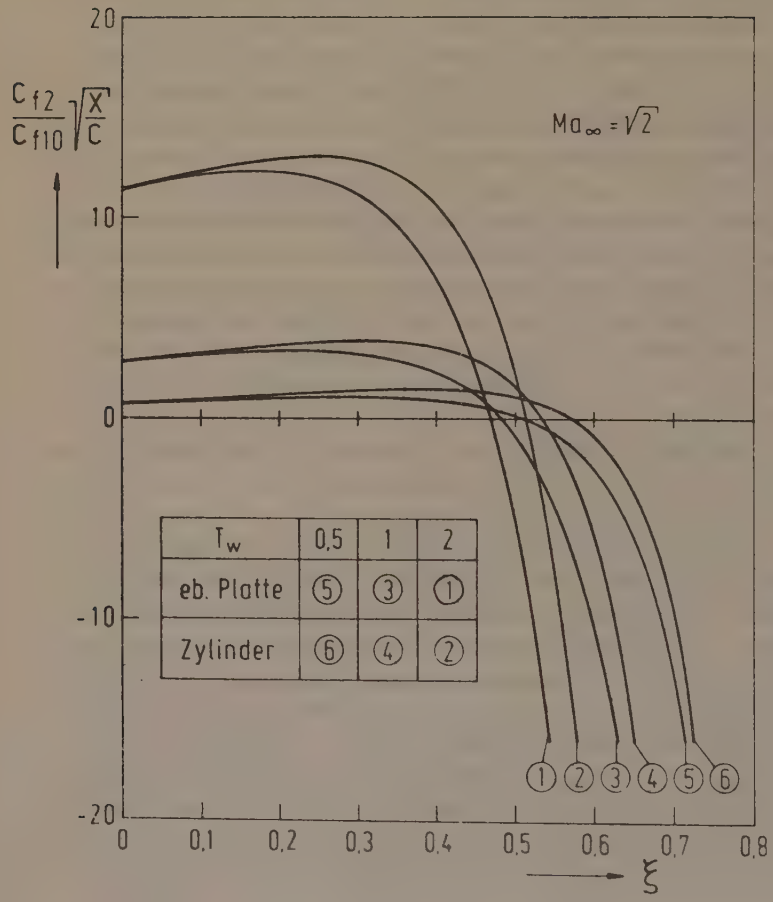


Bild 7: Wandschubspannungskoeffizient 2. Ordnung für ebene Platte und Kreiszylinder, $\dot{m}_{1w} = 1$

Der Einfluß der Querkrümmung auf die Wandschubspannung 2. Ordnung wird aus Bild 7 ersichtlich. Er setzt sich aus zwei Teilen zusammen, dem reinen Krümmungsterm in den Differentialgleichungen (64), (65) und dem gemischten Term aus Krümmungs- und Verdrängungswirkung in der Druckfunktion Gl. (58). Ruft man sich noch einmal in Erinnerung, daß die Wandschubspannung in 1. Näherung bei $\xi_{s1} = 0{,}863$ null wird (s.Bild 3), so macht Bild 7 schon deutlich, daß der Verdrängungseffekt das Grenzschichtverhalten wesentlich stärker beeinflußt als die Querkrümmung.
Die Anfangswerte der Kurven auf den Bildern 6 und 7 stimmen mit den entsprechenden Ergebnissen von Gersten und Gross [5] für den Zylinder mit undurchlässiger Wand überein. Dies zeigt, daß die Terme,um die die Energie- und Bewegungsgleichung der 2. Näherung aufgrund der in dieser Arbeit konsequenten Entwicklung nach dem Störparameter $\varepsilon = Re^{-\frac{1}{2}}$ erweitert worden sind, zumindest an der Vorderkante praktisch keinen Einfluß auf die Vorgänge in unmittelbarer Wandnähe haben.

Die Bilder 8 und 9 zeigen das analoge Verhalten des Wärmeübergangs in 2. Näherung. Hierzu sei bemerkt, daß ohne Ausblasen der Wärmeübergang in 2. Näherung null ist (s. Gersten [5], Maslen [14]). Diesen Wert nehmen alle Kurven an der Vorderkante an, wo Ausblasen mit konstantem Massenstrom noch keine Wirkung hat.

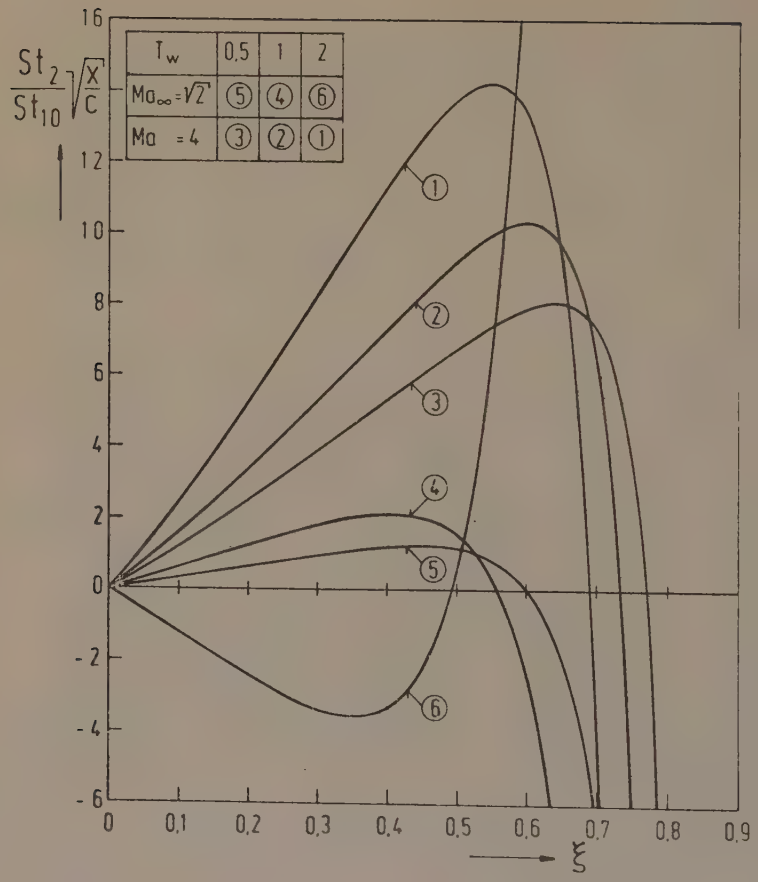


Bild 8: Wärmeübergang 2. Ordnung für die ebene Platte mit $\hat{m}_{1w} = 1$

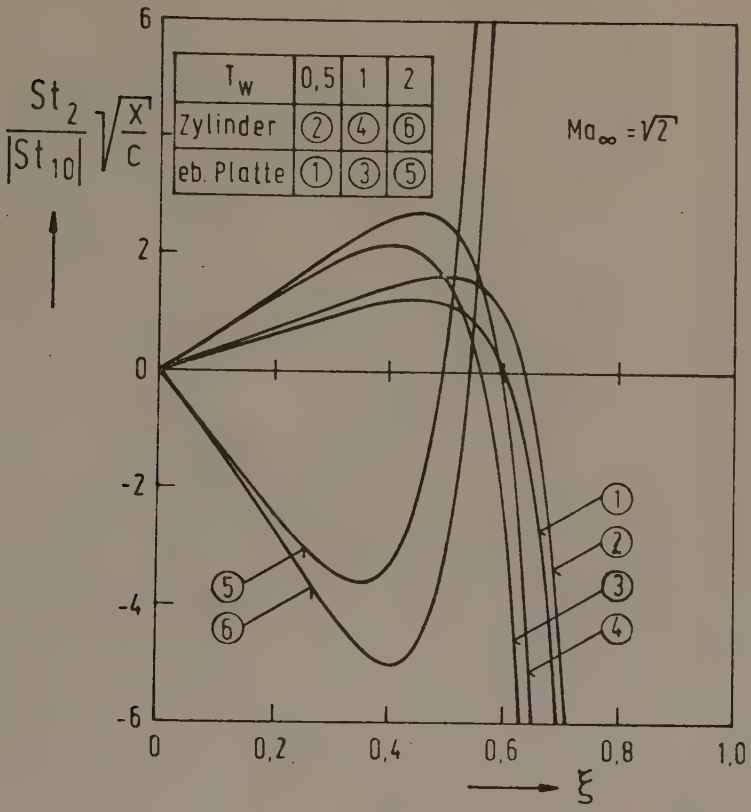


Bild 9: Wärmeübergang 2. Ordnung für ebene Platte und Kreiszylinder, $\dot{m}_{1w} = 1$

Der starke Einfluß des Verdrängungseffektes tritt auch in den *Bildern 1o u. 11* zutage. Hier ist das Ergebnis für die Wandschubspannung bzw. den Wäremübergang aus 1. und 2. Näherung zusammen aufgetragen. Die gestrichelte Kurve stellt noch einmal das entsprechende Ergebnis aus der 1. Näherung dar. Der Verlauf der Schubspannung in der Umgebung des Ablöseortes 2. Näherung zeigt nicht mehr das von Stewartson [18] gefundene Verhalten für die 1. Näherung (vgl. S.10), hat aber im Gegensatz zum Ablöseverhalten infolge eines Druckgradienten in 1. Näherung am Ablöseort noch eine endliche Steigung. Wesentlich ist, daß die Schubspannung infolge des induzierten Druckes p_2 einen echten Nulldurchgang aufweist.

Die kurze fast senkrecht gestrichelte Linie auf Bild 11 soll andeuten, daß die Kurve alle bei dem Ordinatenwert "-1" beginnen müßten, da der Wärmeübergang der 2. Näherung an der Vorderkante null ist wie auf Seite 47 gezeigt worden ist. Die numerische Rechnung kann aber nicht das exakte Ergebnis $St_2(0) = 0$ liefern, so daß bei Division mit ξ (vgl. Gl. (71)) das im Bild erkennbar singuläre Verhalten in der unmittelbaren Nähe der Vorderkante auftritt.

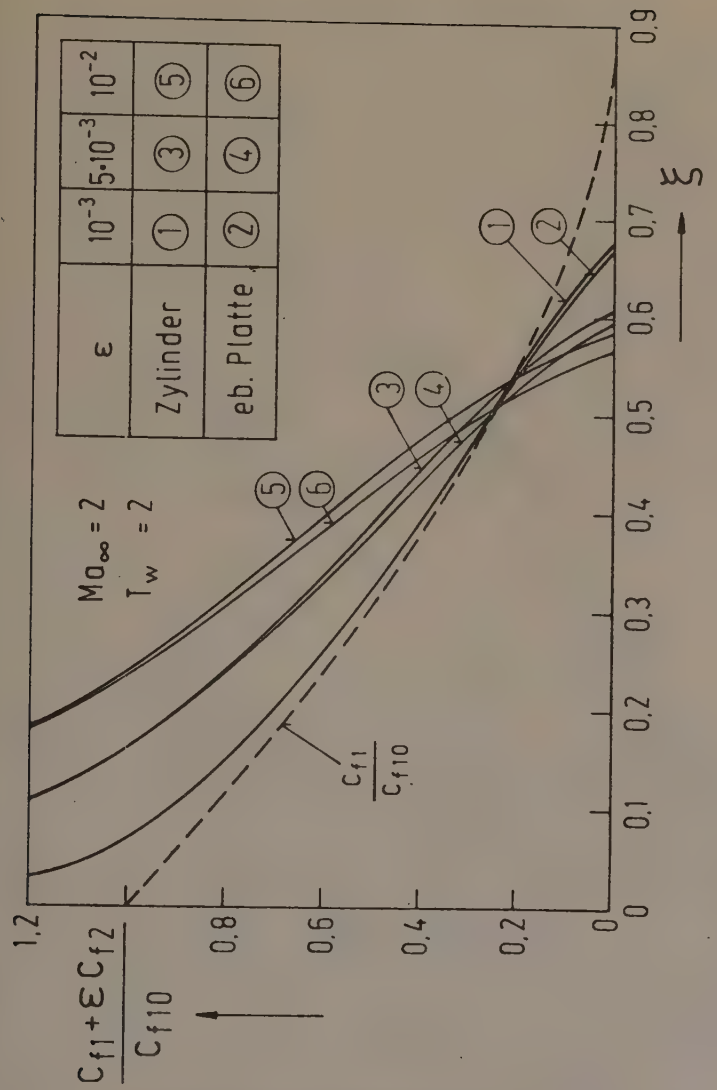


Bild 1o: Wandschubspannungskoeffizient 1. u. 2. Ordnung für verschiedene Werte von ε bei Zylinder und ebener Platte

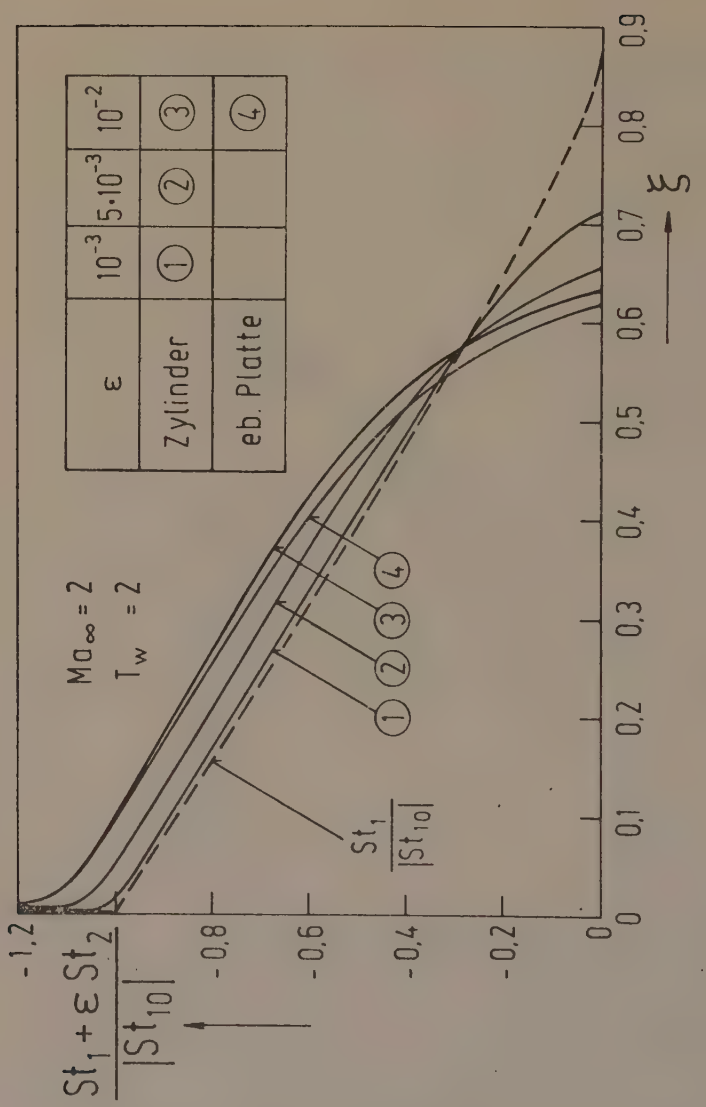


Bild 11: Wärmeübergang 1. und 2. Ordnung bei ebener Platte und Zylinder für verschiedene Werte ε

Die *Bilder 12 - 17* zeigen die Abhängigkeit des Ablöseortes 2. Ordnung von der Wandtemperatur T_w und der Machzahl Ma_∞ aufgetragen über dem Störparameter. Wegen der Separierbarkeit des Krümmungs- und Verdrängungseffektes ist ihr Einfluß auch getrennt dargestellt. Die *Bilder 12 und 13* für die ebene Platte geben nur den Einfluß des Verdrängungseffektes auf den Ablöseort wieder. Die Quinteszens ist, daß die Abweichung vom Ablöseort 1. Ordnung mit abnehmender Wandtemperatur und zunehmender Machzahl schwächer wird. Die Tendenz der Abhängigkeit von T_w war zu erwarten, da bei kälterer Wand die Grenzschicht dünner wird. Wachsende Machzahl bedeutet aber aufgrund der Dissipation eine Aufheizung und damit eine Verdickung der Grenzschicht. Der induzierte Druck p_2 ist aber umgekehrt proportional zu $\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}$, sinkt also mit wachsender Machzahl. Auch hier zeigt sich die dominierende Rolle des Drucks für das Grenzschichtverhalten.

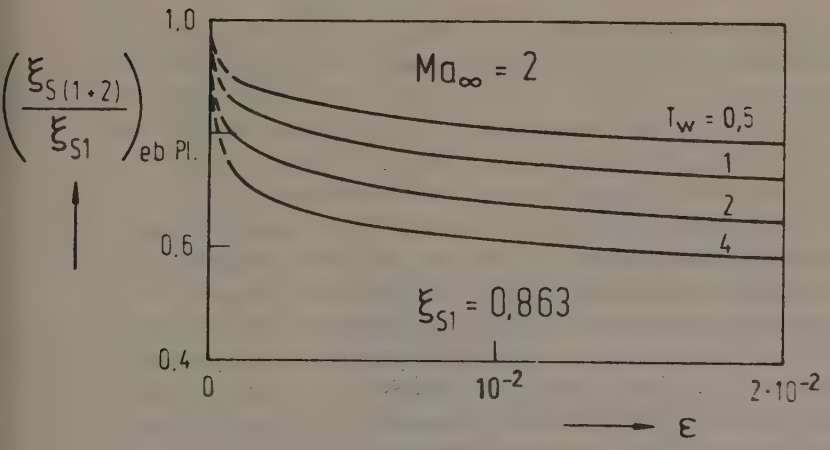


Bild 12: Lage des Ablöseortes in 2. Näherung bezogen auf den der 1. Näherung für die ebene Platte

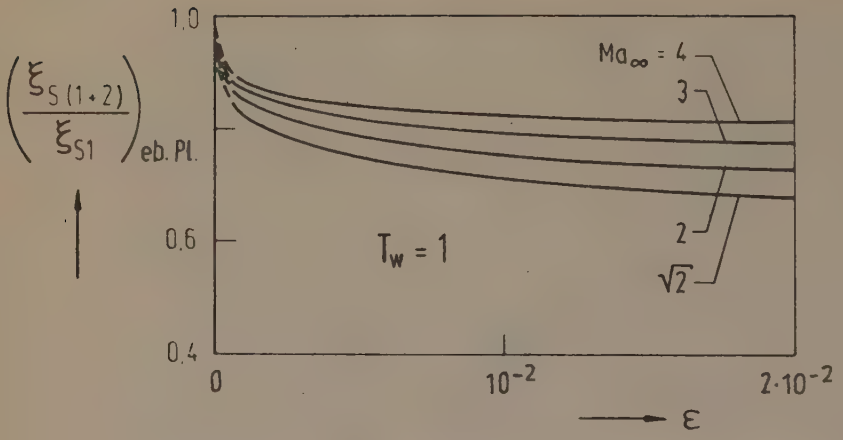


Bild 13 : Einfluß der Verdrängungswirkung auf den Ablöseort (siehe auch Bild 12)

Den Einfluß der Querkrümmung auf die Lage der Ablösestelle in Abhängigkeit von Wandtemperatur, Machzahl und Störparameter kann man von den *Bildern 14 - 17* ablesen. Die Abweichung von der ebenen Platte ist wieder die Summe der Wirkung des reinen Krümmungsterms in den Dgln. (64), (65) und dem gemischten Term in der Druckfunktion Gl.(58). Es erübrigt sich aber, den Einfluß dieser beiden Terme noch zu separieren, da Querkrümmung ohne Verdrängungswirkung nie auftritt. Die Bilder zeigen, daß der Krümmungseinfluß mit sinkender Machzahl und steigender Wandtemperatur wächst. Ein Vergleich der Ordinateneinteilung mit der bei den Bildern 12 und 13 macht den größeren Einfluß der Verdrängung deutlich. Aufgrund der konvexen Querkrümmung wird der Ablösepunkt stromabwärts verschoben; der Verdrängungseffekt hat die umbekehrte Wirkung. Da Machzahl und

Wandtemperatur beim Verdrängungseffekt in gleichem Sinn wirken wie beim Querkrümmungseffekt, wird insgesamt der Ablöseort immer stromaufwärts verschoben.

Der gestrichelte Teil der Kurven auf Bild 16 und auch den noch folgenden ist nicht mehr gerechnet. Es soll nur der weitere Verlauf angedeutet werden.

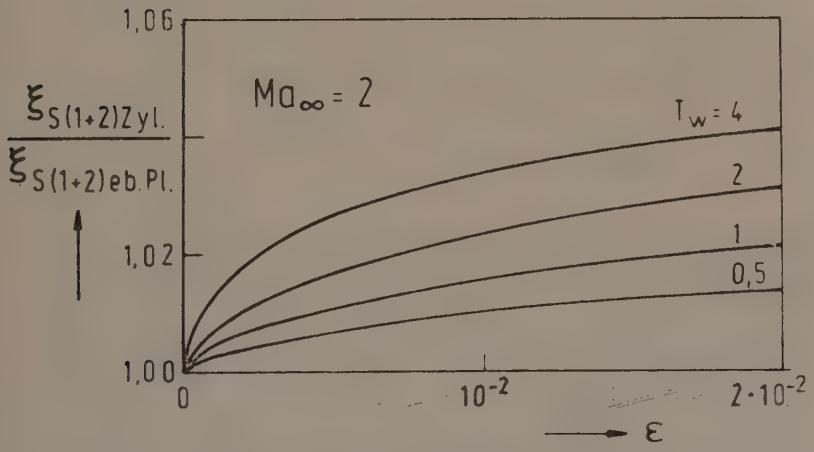


Bild 14: Einfluß der Krümmung auf die Lage des Ablöseortes in 2. Näherung für verschiedene Wandtemperaturen

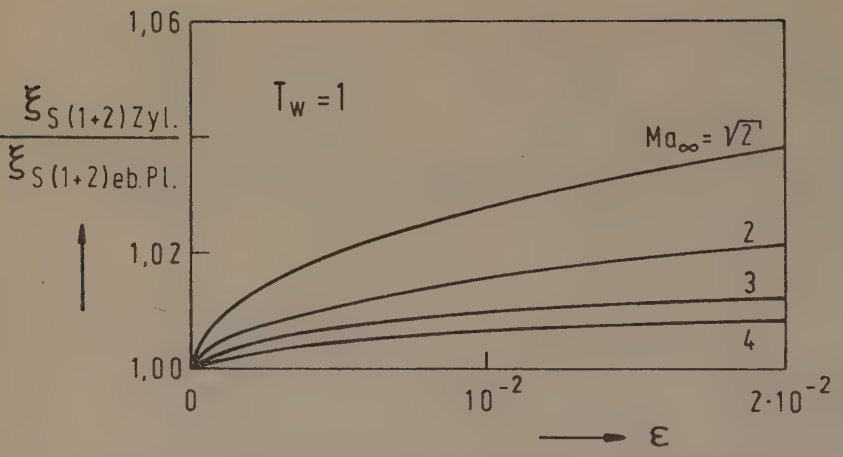


Bild 15 : Einfluß der Querkrümmung auf den Ablöseort in 2. Näherung für verschiedene Machzahlen

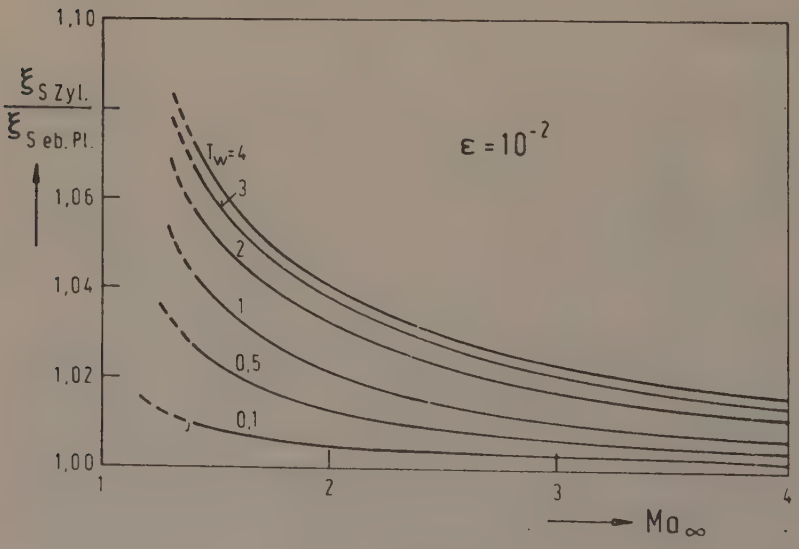


Bild 16 : Einfluß der Querkrümmung auf den Ablöseort in 2. Näherung ($\xi_s = \xi_{s(1+2)}$)

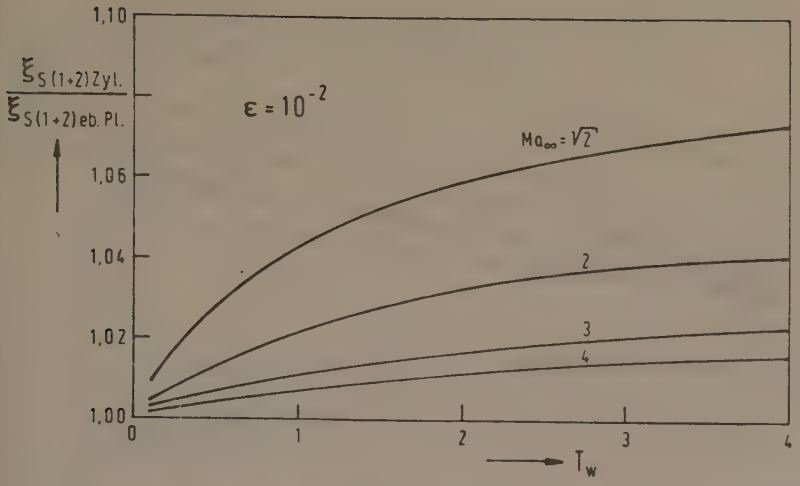


Bild 17 : Einfluß der Querkrümmung auf den Ablöseort in 2. Näherung

Ein ausgezeichneter Punkt der Kurven auf Bild 6 und 7 ist jeweils der Abszissenwert ξ_{S2} für den Nulldurchgang der Kurven. Da in jedem Fall gilt $\xi_{S2} < \xi_{S(1+2)}$ ist er für beliebiges ε eine untere Schranke für den Ablöseort 2. Ordnung $\xi_{S(1+2)}$. Verschiedene Darstellungen für die Lage dieses Punktes beim Kreiszylinder und der ebenen Platte sind auf den *Bildern 18 bis 23* zu sehen. Interessant ist das Auftreten eines Maximums bei den Kurven in Bild 23, das bei der Kurve für $Ma_\infty = \sqrt{2}$ sehr ausgeprägt ist. Mit wachsender Machzahl werden die Maxima flacher und nach größeren Werten T_w verschoben. Für $T_w \to 0$ nehmen die Werte ξ_{20} für Platte und Kreiszylinder beide den Wert ξ_{S1} an wegen der bis zum Ablöseort 1. Ordnung verschwindenden Grenzschichtdicke. Die Kurven in Bild 23 beginnen also alle beim Ordinatenwert null.

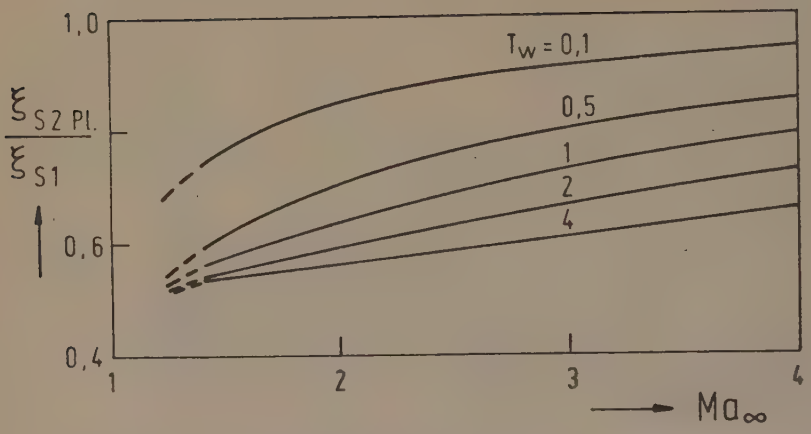


Bild 18 : Lage des Nulldurchganges der Wandschubspannung der 2. Näherung (s. Bild 6) für die ebene Platte bezogen auf den Ablöseort 1. Näherung

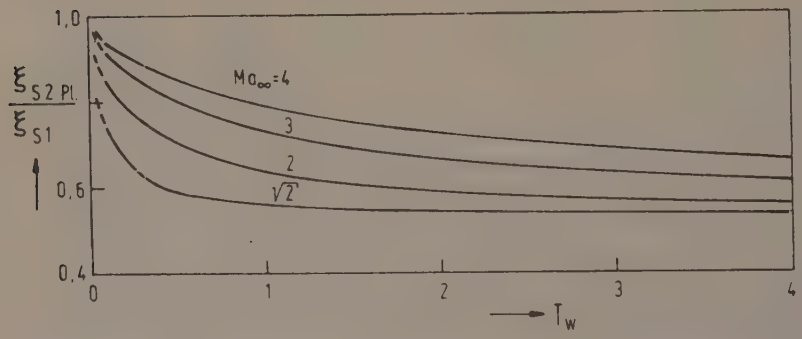


Bild 19 : Lage des Nulldurchganges der Wandschubspannung der 2. Näherung (s. Bild 6) für die ebene Platte bezogen auf den Ablöseort 1. Näherung

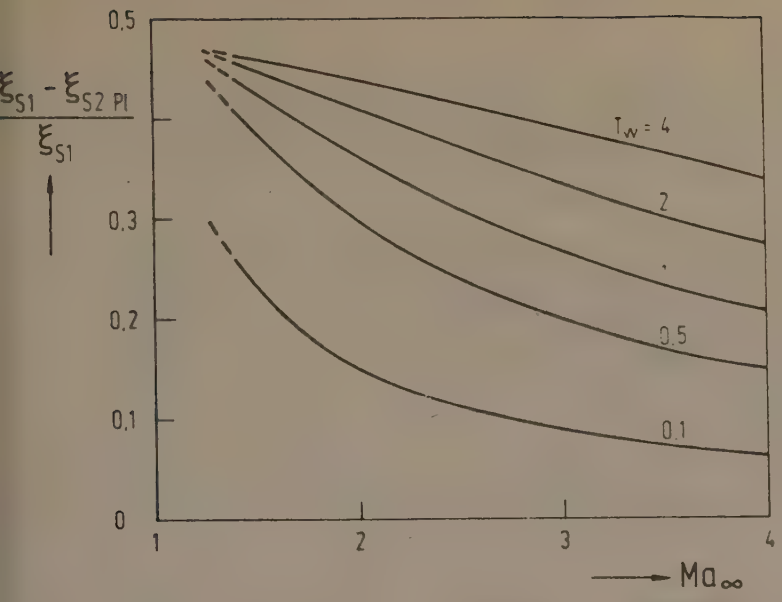


Bild 20: Relative Abweichung des Nulldruchganges der Wandschubspannung der 2. Näherung vom Ablöseort 1. Näherung

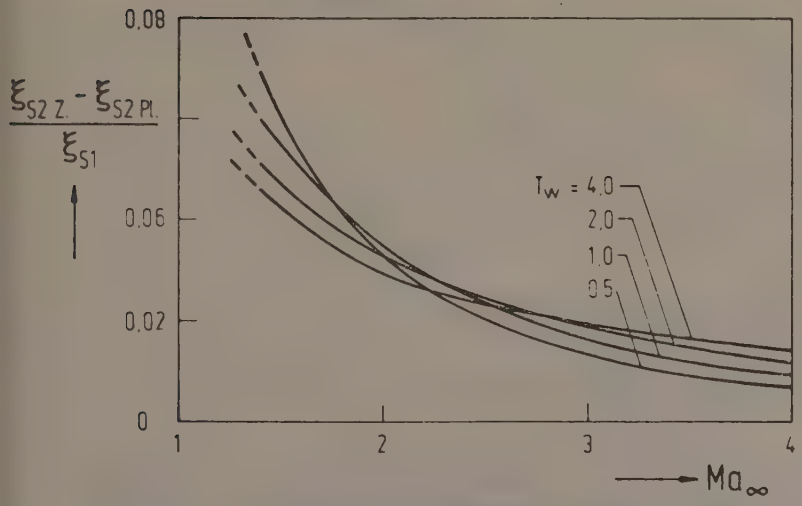


Bild 21: Differenz des Nulldruchganges der Wandschubspannung der 2. Näherung für Kreiszylinder und ebene Platte, bezogen auf den Ablösepunkt 1. Näherung

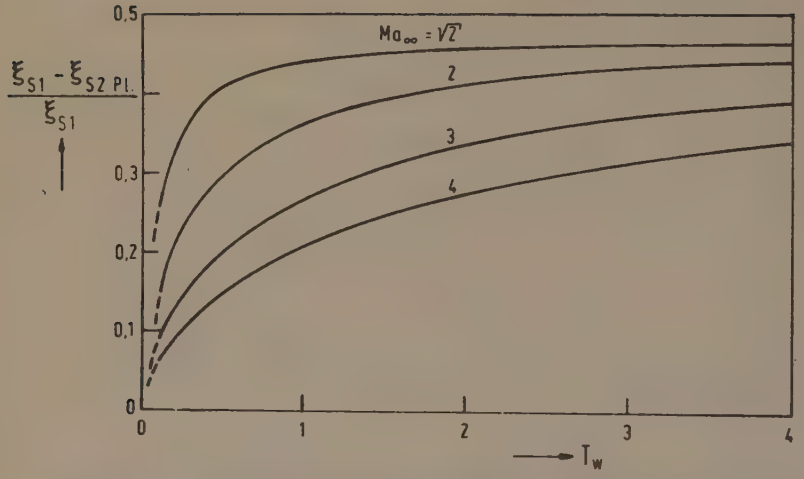


Bild 22 : Differenz des Nulldurchganges der Wandschubspannung der 2. Näherung für Kreiszylinder und ebene Platte, bezogen auf den Ablösepunkt 1. Näherung

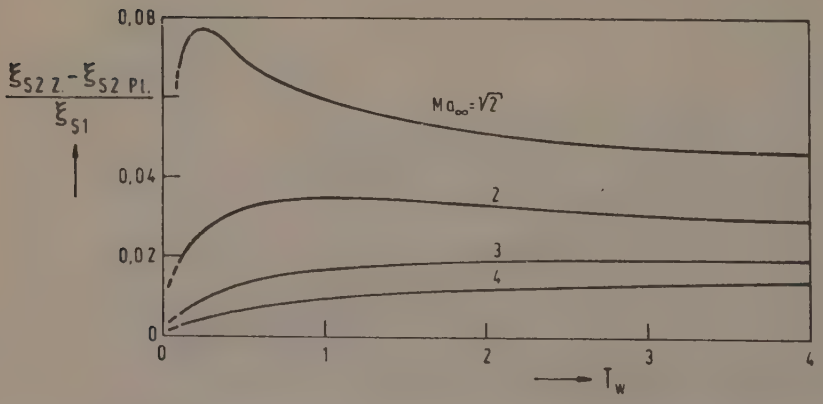


Bild 23 : Differenz des Nulldurchganges der Wandschubspannung der 2. Näherung für Kreiszylinder und ebene Platte bezogen auf den Ablösepunkt 1. Näherung

Grenzschicht 2. Ordnung ohne Gleiten und Temperatursprung an der Wand mit verschiedenen Werten für den Ausblaseparameter $\dot{m}_{1w}$.

Wie aus den Differentialgleichungen (64) und (65) und Gl. (58) hervorgeht, ist explizite Abhängigkeit der Gleichungen von der ausgeblasenen Massenstromdichte $\dot{m}_{1w}$ beschränkt auf den Krümmungsanteil. Die Ergebnisse für die ebene Platte sind bezüglich $\dot{m}_{1w}$ allgemein. Dies ist in den *Bildern 24 und 25* durch die gestrichelte Kurve dargestellt, die für jede der drei Kreiszylinderlösungen die entsprechende Plattenlösung ist. Mit schwächer werdendem Ausblasen wächst, wie man aus den Bildern 24 und 25 entnimmt, der Krümmungseinfluß.

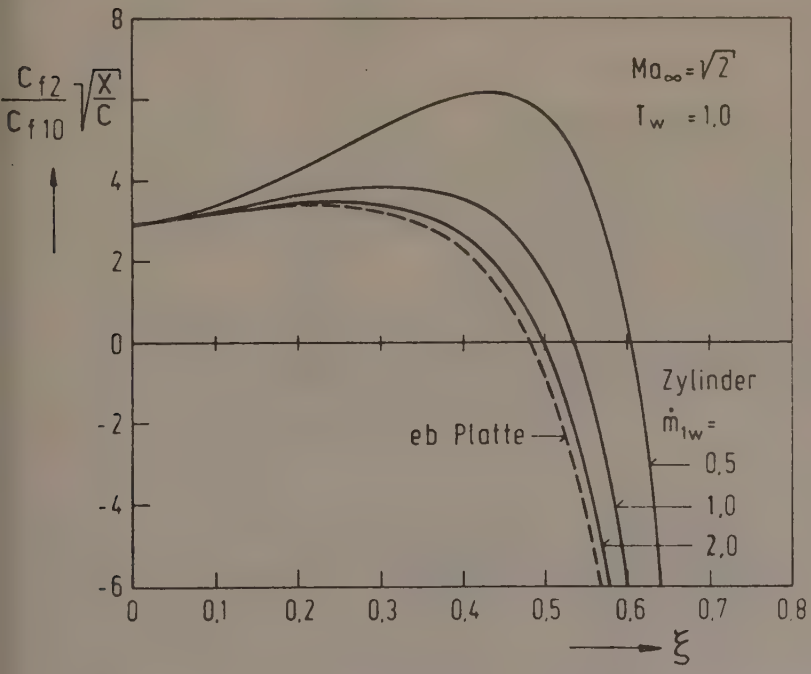


Bild 24: Wandschubspannungskoeffizient 2. Näherung für unterschiedliche Werte des Ausblaseparameters

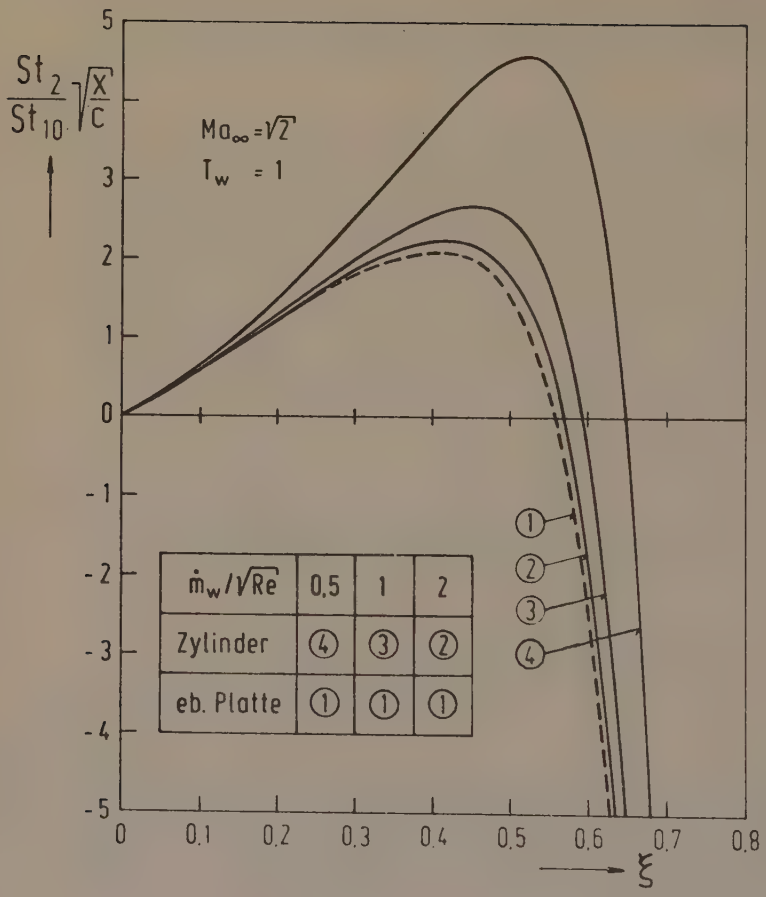


Bild 25 : Wärmeübergang 2. Näherung für verschiedene Werte des Ausblaseparameters

Die Abweichung der Lage des Nulldurchganges der Wandschubspannung (Bild 24) beim Zylinder im Vergleich zur Platte in Abhängigkeit von $\dot{m}_{1w}$ ist in *Bild 26 und 27* zu sehen.

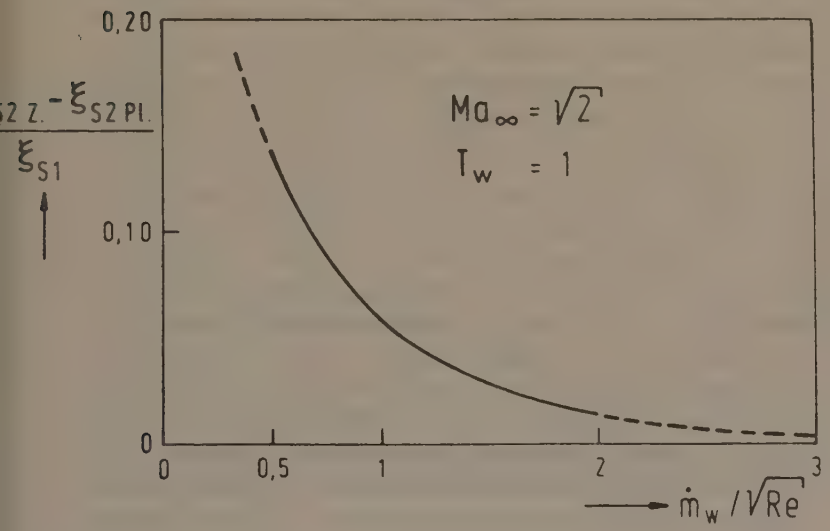


Bild 26 : Differenz des Nulldurchganges der Wandschubspannung 2. Näherung für Kreiszylinder und ebene Platte (s. Bild 24) bezogen auf die Lage der Ablösung 1. Ordnung.

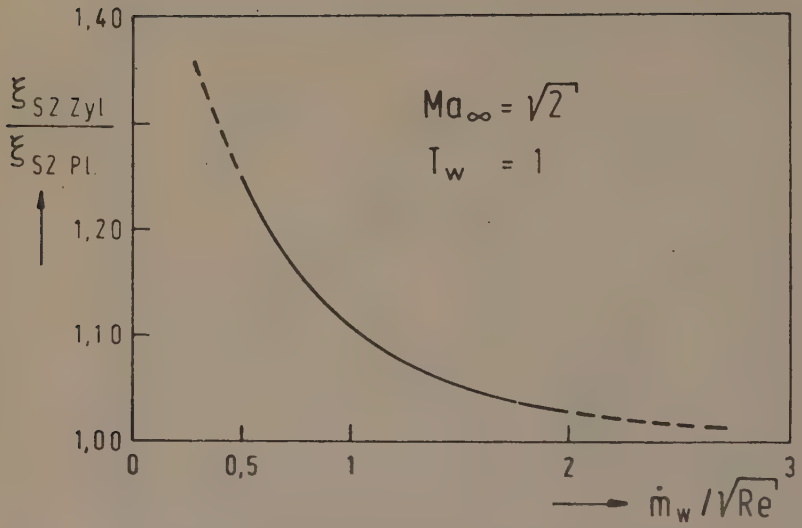


Bild 27 : Verhältnis des Nulldurchganges der Wandschubspannung 2. Näherung (s. Bild 24)

Grenzschicht 2. Ordnung mit Gleiten und Temperatursprung an der Wand ($\dot{m}_{1w} = 1$)

Die *Bilder 28 und 29* zeigen die Abweichung der Wandschubspannung und des Wärmeübergangs bei Geschwindigkeits- und Temperatursprung in 2. Näherung an der Wand von den entsprechenden Ergebnissen ohne Gleiten und Temperatursprung. Die numerischen Rechnungen für die beiden Bilder sind wegen der Separierbarkeit der Effekte 2. Ordnung nur für die ebene Platte durchgeführt worden.

Im Fall einer undurchlässigen Wand hat die Unstetigkeit an der Wand in der 2. Näherung noch keinen Einfluß auf Wandschubspannung und Wärmeübergang, wie Maslen [14] gezeigt hat. Bei poröser Wand ist das nicht mehr so. An der Vorderkante stimmen die Ergebnisse mit denen von Maslen überein, da für $\xi = 0$ die Massenzufuhr noch nicht zur Wirkung kommt. Für $\xi > 0$ zeigen die beiden Bilder aber sowohl für die Wandschubspannung als auch für den Wärmeübergang eine positive Abweichung. Die Unstetigkeit an der Wand vergrößert die Wandschubspannung und demzufolge wird der Ablösepunkt weiter stromab verschoben. Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit den Resultaten von Inger und Swean [28]. Der Effekt ist aber so gering, daß er gegenüber Querkrümmung und Verdrängung vernachlässigt werden kann.

Die Tatsache, daß bei Gleiten und Temperatursprung die Wandschubspannung größer wird, ist zunächst verblüffend. Zum besseren Verständnis wird die Wirkungsweise und die Abhängigkeit von T_w und Ma_∞ der beiden Terme, aus denen sich in Gleichung (70) die Wandschubspannung 2. Ordnung zusammensetzt, einzeln diskutiert. Der erste Term gibt die Abweichung des Geschwindigkeitsgradienten und damit auch die Änderung des Geschwindigkeitsprofils von dem Ergebnis der 1. Ordnung wieder. Der Vergleich der Geschwindigkeitsprofile an einer Stelle ξ, z.B. $\xi = 0$, (s. hierzu auch Bild 34) ergab, daß aufgrund der verminderten Haftung an der Wand das Maximum im Geschwindigkeitsprofil 2. Ordnung über die Grenzschicht hinweg (Bild 34) bei kleinen Machzahlen und großen Temperaturverhältnissen T_w (z.B. $Ma_\infty = \sqrt{2}$, $T_w = 4$) etwas ausgeprägter wurde. Die Zunahme der Geschwindigkeit u_2 war zwar gering (im Vergleich zu den Ergebnissen ohne Gleiten mit den gleichen Parametern),

aber ausreichend, um zu einem schwachen Anwachsen des Gradienten an der Wand zu führen. Bei einer gegenläufigen Änderung der Parameter wechselte das Bild. Für $Ma_\infty = 4$ und $T_w = 1$ war der größte Wert für u_2 die Gleitgeschwindigkeit. Das Geschwindigkeitsprofil zeigte kein Maximum mehr, sondern fiel kontinuierlich bis auf den Wert am Außenrand der Grenzschicht; dabei hatte das Profil bereits bei $\eta = 0$ eine negative Steigung u_2'.

Der zweite Term für C_{f2} in Gleichung (70) stellt den reinen Zähigkeitseinfluß in 2. Näherung auf die Schubspannung dar. Wegen der Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit spielt hier der Temperatursprung an der Wand eine Rolle. Da dieser proportional zum Temperaturgradient an der Wand aus der 1. Näherung ist, wird die Richtung des Wärmestroms 1. Ordnung wesentlich. Die Rechnungen ergaben, daß global gesehen für $T_w \gtrless Ma_\infty$ der Beitrag der Zähigkeit 2. Ordnung zur Schubspannung ein negatives Vorzeichen hatte und für $Ma_\infty > T_w$ ein positives und außerdem betragsmäßig stark anwuchs (vgl. hierzu auch Gl.(67b)). Der zusammengesetzte Einfluß ergibt für Ausblasen ein von Null verschiedenes Ergebnis und ist in Bild 28 wiedergegeben.

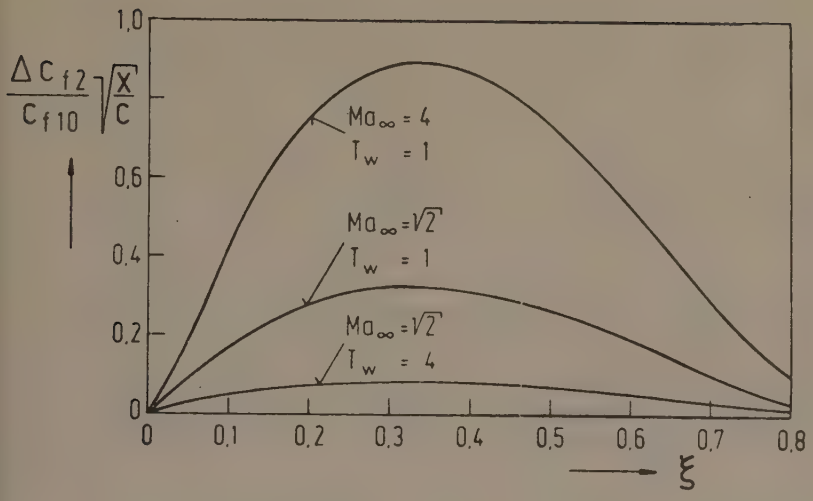


Bild 28: Abweichung der Wandschubspannung 2. Näherung bei Gleiten und Temperatursprung an der Wand (ebene Platte) $\Delta c_{f2} = c_{f2}$ (mit Gleiten und Temperatursprung) - c_{f2} (ohne Gleiten und Temperatursprung)

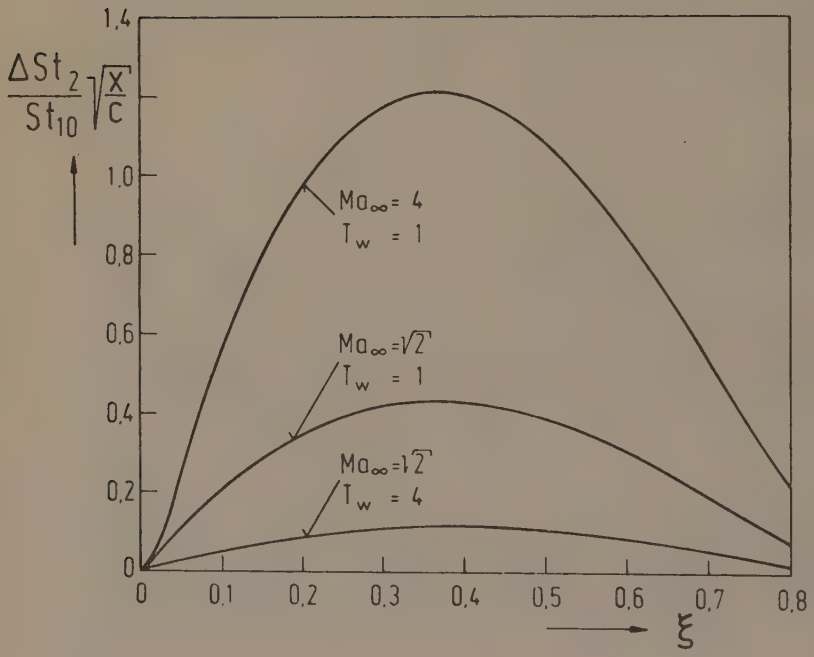


Bild 29: Wärmeübergang 2. Näherung bei Gleiten und Temperatursprung an der Wand (ebene Platte)
$\Delta St_2 = St_2$ (mit Gleiten und Temperatursprung) $- St_2$ (ohne Gleiten und Temperatursprung)

Zusammenfassung:

Für eine kompressible laminare Überschallströmung wurde für große Reynoldszahlen nach der Methode einer singulären Störungsrechnung von Kaplun und v. Dyke die Grenzschicht bis zur 2. Ordnung einschließlich an einem Kreiszylinder berechnet. Die Grenzschicht wurde beeinflußt durch Massenzufuhr durch die Zylinderoberfläche, weiterhin durch die Effekte 2. Ordnung, Querkrümmung, Verdrängungswirkung der Grenzschicht und Geschwindigkeits- und Temperatursprung an der Wand.

Die ausgeblasene Massenstromdichte war ebenso wie die Wandtemperatur konstant. Die das Problem beschreibenden partiellen Differentialgleichungssysteme für die Grenzschicht 1. und 2. Ordnung wurden von der Vorderkante des Zylinders bis zur Ablösestelle aus der Grenzschichtrechnung 1. Ordnung numerisch gelöst.

Die reibungsfreie Außenströmung wurde nach der Operatormethode von Lighthill und Ward bestimmt. In den Ergebnissen sind die Wandschubspannung, der Wärmeübergang und die Verlagerung des Ablöseortes der 1. Ordnung dargestellt in Abhängigkeit der Wandtemperatur, der Machzahl der ungestörten Strömung, der Intensität des ausgeblasenen Massenstroms und des Störparameters $\frac{1}{\sqrt{Re}}$.

Die numerischen Rechnungen wurden durchgeführt für Zylinder und ebene Platte mit T_w = 0,1; 0,5; 1; 2; 3; 4; $Ma_\infty = \sqrt{2}$; 2; 3; 4 und $\frac{\dot{m}_{1w}}{\sqrt{Re}}$ = 0,5; 1; 2.

Dabei wurde die Größe der Einflüsse von Verdrängungswirkung, Querkrümmung und Unstetigkeit der Geschwindigkeit und Temperatur an der Wand deutlich.
Der dominierende Effekt ist, auch bei gekühlter Wand, der Verdrängungseffekt, verstärkt durch das starke Anwachsen der Grenzschicht in der Nähe des Ablöseortes 1. Ordnung. Hier zeigte sich auch der große Einfluß des durch die Verdrängungswirkung induzierten Druckes auf das analytische Verhalten der Wandschubspannung bei Annäherung an den Ablöseort 2. Ordnung.

Auf Platz 2 steht die Wirkung der Querkrümmung, deren Einfluß mit schwächer werdendem Ausblasen wächst.

Die Beeinflussung der Schubspannung und des Wärmeübergangs durch Gleiten und Temperatursprung an der Wand ist zwar von gleicher Größenordnung (bezüglich $Re^{-1/2}$) wie die der beiden anderen Effekte, zahlenmäßig aber wesentlich geringer.

Die Ergebnisse machen klar, daß die Verdrängungswirkung der Grenzschicht zunächst ein Anwachsen der Wandschubspannung bewirkt und dann (nach dem Wendepunkt im Verlauf der Verdrängungsdicke) eine starke Abnahme. Querkrümmung und Geschwindigkeits- und Temperatursprung erhöhen stets die Schubspannung an der Wand.

Teil D

Berücksichtigung der Querkrümmung in den Differentialgleichungen der 1. Näherung einer systematischen Entwicklung der Navier-Stokes Gleichung.

Die Behandlung der Grenzschichtströmung nach der van Dyke'schen Methode beinhaltet bei singularen Erscheinungen in der 1. Näherung, wie sie die Ablösung darstellt, einen Nachteil. Es ist nicht möglich, die Rechnung für die 2. Näherung über den Ablöseort 1. Ordnung hinaus auszudehnen, weil die dazu benötigte Lösung der Grenzschichtgleichungen 1. Ordnung dort nicht bekannt ist. Im allgemeinen ist dies auch nicht nötig, da die Verdrängungswirkung, die immer die Tendenz hat, den Ablöseort stromaufwärts zu verschieben, selbst bei stark gekühlter Wand in der Nähe der Ablösestelle alle übrigen Effekte 2. Ordnung überwiegt. Es sind jedoch Fälle denkbar, wo die Querkrümmung bei extrem dünnen Zylinder so stark wird, daß sie die Verdrängungswirkung überwiegt und der Ablösepunkt dadurch weiter stromabwärts verlagert wird. Das ist gleichbedeutend mit einer Vernachlässigung der Verdrängungswirkung in van Dyke'schen Verfahren, das jedoch dann zwangsläufig mit Erreichen der Ablösestelle für die ebene Platte endet. Es ist folglich damit nicht möglich, den Ablöseort für einen Zylinder mit sehr starker Querkrümmung zu bestimmen. Damit ist schon angedeutet, daß der Zylinderradius nicht mehr von der Größenordnung O (1) ist, sondern mehr in die Größenordnung der Grenzschichtdicke rückt. Um den Ablöseort erreichen zukönnen, müssen die Differentialgleichungen der 1. Näherung einer systematischen Entwicklung der Navier-Sokes Gleichungen einen Krümmungsterm enthalten. Dies ist dann und nur dann möglich, wenn der Krümmungsradius die gleiche Größenordnung erreicht hat wie die Grenzschichtdicke, d.h. $R_o = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$. Dabei ist darauf zu achten, daß die charakterische Länge in der Reynoldszahl nicht mehr der Zylinderradius, sondern eine andere Länge der Größenordnung O (1) ist. Mit $R = a \cdot \varepsilon$ folgt dann analog zu Gleichung (29) für die Bewegungsgleichung in x - Richtung in 1. Näherung:

$$\rho_1^i \left(u_1^i \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1^i \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_1^i \frac{\partial u_1^i}{\partial y} \right) + \frac{\mu_1^i}{r} \frac{\partial u_1}{\partial y} \qquad (D1)$$

$\bar{r} = \bar{y} + a$; in dieser Entwicklung ist die Querkrümmung ein Effekt 1. Ordnung, während die Verdrängungswirkung ein Effekt höherer Ordnung bleibt. Diese Tendenz steht in Analogie mit den Erkenntnissen aus der "slender body" Theorie.

Gl(D1) ist formal völlig identisch mit der Grenzschichtgleichung, die in den in der Einleitung erwähnten Arbeiten [4], [6], [8], [13], [16], [25] für die Grenzschichtrechnung 1. Ordnung bei Körpern mit Querkrümmung verwendet wird. Es sei aber noch einmal daraufhingewiesen, daß diese Methode mathematisch nur dann haltbar ist, wenn $O(\delta) = O(R_o)$ gilt, d.h. entweder für sehr dünne zylindrische Körper oder bei sehr dicken Grenzschichten. Solange aber $O(\delta) < O(R_o)$ gilt, ist die Methode bezüglich einer Größenordnungsbetrachtung nicht konsistent. Dies ist der Fall für [4], [8], [13], [16] und [25], bei denen der örtliche Krümmungsradius $R_o(x) = O(1)$ ist.

Wenn der Zylinderradius nun von der Größenordnung des Störparameters ist und praktisch selbst die Bedeutung einer Störgröße erlangt, erscheint es ratsam, eine andere geometrische Größe als charakteristische Länge zu wählen. Eine Möglichkeit wäre der Abstand der Ablösestelle von der Vorderkante für die ebene Platte, denn dieser ist die untere Grenze für alle hier bei einem Zylinder mit $R_o = O(\varepsilon)$ möglichen Entfernungen des Ablöseortes von der Vorderkante. Die zweite Möglichkeit ist eine Kombination aus den das Problem kennzeichnenden Größen Zähigkeit und ausgeblasener Massenstrom:

$$L = \frac{\nu_\infty}{U_\infty} \left(\frac{\rho_w^* v_w^*}{\rho_\infty U_\infty}\right)^{-2} = O(1)$$

Bezieht man alle geometrischen Größen in (D1) auf L und führt eine Transformation analog zu Teil B durch, so folgt für (D1) (unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung):

$$(1+\frac{2C}{a\,\dot{m}_{1w}}\,\xi\int_0^\eta\frac{1}{\rho_1}\,d\eta)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2}+\{\frac{1}{2}\int_0^\eta\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi u_1)d\eta-(1-\frac{2C}{a\,\dot{m}_{1w}\rho_1})\xi\}\frac{\partial u_1}{\partial\eta}-$$

$$-\frac{1}{2}\,\xi\,u_1\,\frac{\partial u_1}{\partial\xi}=0 \qquad \text{(D2)}$$

darin ist $\xi=\dot{m}_{1w}\sqrt{\frac{x}{c}}$ und $\eta=\frac{1}{a\sqrt{cx}}\int_0^\eta\rho_1\,(a+\bar{y})d\bar{y}$. (D3)

a ist die Proportionalitätskonstante für den Zylinderradius ($\frac{R_o}{L}=\frac{a}{y}\cdot\varepsilon$). Wie man sieht, ist die Howarth-Koordinate hier $\bar{\eta}=\frac{1}{a}\int_0^{\bar{y}}\rho_1(a+\bar{y})\,d\bar{y}$, und die "Howarth-Geschwindigkeit" ist

$$v_1=(a+\bar{y})\cdot\rho_1\cdot v_1+u_1\,\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial\bar{x}} \quad . \qquad \text{(D4)}$$

Ob die Lösung von Gl.(D2) zu einer Ablösung führt oder nicht, hängt von dem Klammerausdruck $-(1-\frac{2C}{\rho_1\,a\,\dot{m}_{1w}})=A$ ab.
Für $A<0$ tritt Ablösung auf - und zwar umso später, je kleiner der Absolutbetrag von A ist - und für $A\geq 0$ nicht. Der entscheidende Parameter ist offenbar das Produkt aus Massenzufuhr und Zylinderradius $a\,\dot{m}_{1w}=b$. Da in jedem Fall $A>-1$ ist, liegt der Ablösungspunkt weiter stromabwärts als bei der ebenen Platte oder einem Zylinder mit $R_o=O(1)$ $(A=-1)$.

Zur Illustration ist in *Bild 30* ein Vergleich mit Ergebnissen wiedergegeben, die nach der in dieser Arbeit verwendeten Methode (s.Teil B) gewonnen wurden (ausgezogene Kurven). Von den Effekten 2. Ordnung ist dabei nur die Querkrümmung berücksichtigt worden.
Die gestrichelten Kurven geben die Lösung von Gl.(D2) wieder und zwar jeweils für $a\cdot\dot{m}_{1w}=\frac{1}{\varepsilon}$ (Kurven 1 und 2).
Der wesentliche Unterschied ist, daß die Kurven 1 und 2 ungestört über den Ablöseort der ebenen Platte hinaus verlaufen. Es wird aber auch deutlich, daß die auf verschiedene Weise gewonnenen Ergebnisse für Werte von $\xi<\xi_{S1}$ nicht exakt über einstimmen.

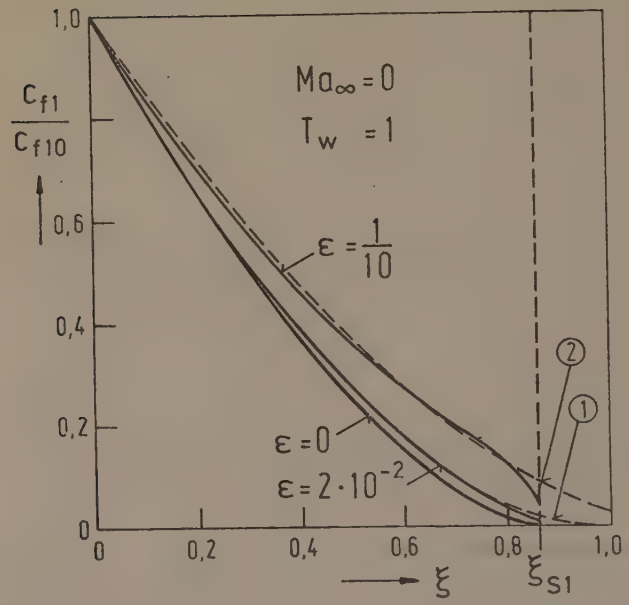


Bild 30 Wandschubspannung bei Querkrümmung in 1. oder in 2. Ordnung.

Diese Abweichung ist nicht auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen, denn sie wächst nicht stetig zu größeren ξ-Werten hin. Bei der Kurve für $\varepsilon=2\cdot10^{-2}$ liegen die Differenzen aber innerhalb der Strichstärke, deshalb fallen beide Kurven praktisch zusammen. Für den größeren ε-Wert wird jedoch ein Unterschied deutlich sichtbar.
Wenn man nun den Krümmungseffekt in einer Grenzschichtrechnung 1. Ordnung berücksichtigen will, wenn der Zylinderradius $R_o = O(1)$ ist, muß man in den Gleichungen (D2) und (D3) nur a durch $\frac{1}{\varepsilon}$ ersetzen (alle Längen sind dabei auf R_o bezogen worden, und es ist $\varepsilon = (R_o U_\infty/\nu_\infty)^{-1/2}$.

Nun ist also weder die Bewegungsgleichung noch die Grenzschichtkoordinate η frei vom Störparameter ε.
Der für die Tendenz des Schubspannungsverlaufs (zunehmend oder abnehmend) wesentliche Term A in Gl.(D2) lautet nun $A = -(1-\varepsilon\frac{2C}{\rho_1 \bar{m}_{1w}})$. Formal wäre es auch jetzt noch möglich, ein Ablösen der Grenzschicht völlig zu verhindern, wenn nur die Reynoldszahl klein genug ist. Dies steht aber im Widerspruch zur Grenzschichtvorstellung.
Es wird auch deutlich, daß eine Einteilung der Störeffekte der nach Größenordnungen des Störparameters nicht mehr möglich ist, denn der Einfluß der Querkrümmung in Gl.(D2) (der 2. Summand von A und der Wurzelausdruck im ersten Term der Gleichung) ist nicht mehr von 1. Ordnung, aber auch nicht der reine Anteil der 2. Ordnung.
Bei Hinzunahme weiterer Effekte höherer Ordnung wird die Beurteilung der Einzelwirkungen noch unklarer.

Anhang

Transportkoeffizienten und der Chapman-Rubesin Parameter

Die Howarth-Transformation Gl(50a) führt bei den Grenzschichtgleichungen 1. Ordnung auf eine Kombination $\rho_1 \cdot \mu_1$. Beide Größen sind temperaturabhängig, wobei ρ_1 hier einfach $\rho_1 = \frac{1}{T_1}$ ist.

Für die Zähigkeit gibt es, als Folge der unterschiedlich starken Vereinfachungen beim zugrundegelegten gaskinetischen Modell, zahlreiche Gesetzmäßigkeiten für die Temperaturabhängigkeit. Die einfache kinetische Theorie, die keine intermolekularen Kräfte und nur eine konstante mittlere Molekülgeschwindigkeit kennt, liefert $\mu \sim \sqrt{T}$. In dem Temperaturbereich $0 < T^* < 1500\ ^oK$ sind die Abweichungen von den exp. Meßwerten bereits beträchtlich (bis ca. 40%). Häufig wird auch der Ansatz $\mu = T^\omega$ gemacht, mit $1 \leq \omega \geq 0.5$.

Realistischere Gasmodelle, mit Geschwindigkeitsverteilung und einem Potential für die Wechselwirkung der Moleküle, liefern Funktionen für die Zähigkeit, die die Meßdaten wesentlich besser wiedergeben. Mit die bekanntesten davon sind die Gleichungen von Sutherland und die von Bromley u. Wilke. Vor allem die letztere gibt die experimentellen Befunde mit großer Genauigkeit wieder. Für ein Einstoffsystem bei Normaldruck ist die maximale Abweichung von den Meßwerten im Temperaturbereich $100^oK < T^* < 1500^oK$ nicht ein Prozent.

Für die Grenzschichtrechnung ist es nun wünschenswert, daß das Produkt $\rho_1 \cdot \mu_1$, das als einzige Kopplungsgröße zwischen Impuls und Energiegleichung in der 1. Näherung übriggeblieben ist, auch temperaturunabhängig ist. Es hat sich nämlich gezeigt, daß eine Temperaturabhängigkeit gerade dieses Terms bei den numerischen Rechnungen große Schwierigkeiten bezüglich der Stabilität mit sich bringt. Dies führt schon bei der Lösung der Gleichungen 1. Ordnung zu sehr großen Rechenzeiten.

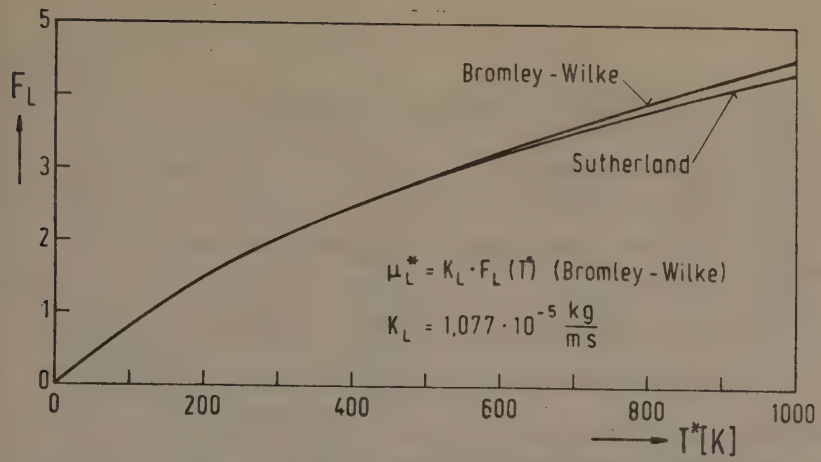


Bild 30: Temperaturabhängigkeit der Viskosität für Luft nach Bromley und Wilke

An Bild 30 ist zu erkennen, daß die Temperaturabhängkeit von μ^* bis $T^* \approx 200^\circ K$ für Luft praktisch linear ist. Wenn also die maximale Temperatur in der Grenzschicht $200^\circ K$ nicht übersteigt, ist $\frac{\mu^*}{\mu_\infty} = \frac{T^*}{T_\infty}$ nahezu exakt. Leider ist diese Einschränkung der Temperatur für praktische Fälle nicht realisierbar.

Ausgehend von der Sutherlandgleichung $\frac{\mu^*}{\mu_\infty} = \frac{T^*}{T_\infty}^{\frac{3}{2}} \frac{T_\infty + T_S^*}{T^* + T_S}$

haben Chapman und Rubesin für die Grenzschicht den Verlauf $\frac{\mu^*}{\mu_\infty} = C \frac{T^*}{T_\infty}$ angenommen. Dabei wird die Konstante C so bestimmt, daß die Zähigkeit für die Wandtemperatur mit dem entsprechenden Wert nach der Sutherlandgleichung übereinstimmt. Die Überlegung dabei war, trotz des linearen Zusammenhangs, wenigstens an der Wand die richtigen Werte für die Zähigkeit zu berücksichtigen. Es folgt aus dem Vergleich sofort

$$C = \sqrt{T_W} \cdot \frac{1 + T_S}{T_W + T_S} \qquad \left(T_W = \frac{T_W^*}{T_\infty},\ T_S = \frac{T_S^*}{T_\infty}\right)$$

T_S^* ist die Sutherlandkonstante.

Betrachtet man die Bromley-Wilke Gleichung als Wahrheit, so gibt die Sutherlandgleichung nach Anpassen durch den Faktor T_S^* in dem ausgewählten Temperaturbereich recht genaue Ergebnisse. (s.Tab. 1)

T	0	0,29	0,86	1,44	2,01	2,6	2,88	5,76
μ nach Bromley Wilke	0	0,337	0,895	1,30	1,634	1,931	2,07	3,246
μ nach Suther-land	0	0,336	0,895	1,296	1,616	1,89	2,014	3,0

Tab. 1, $T_\infty = 273^oK$, $\mu_\infty = 20 \cdot 10^{-6} \frac{Kg}{ms}$, $T_s^* = 86,9^oK$
(aus den Werten für $T_1^* = 200^oK$ u. $T_2^* = 400^oK$)

Die größte Abweichung bei T = 5,76 ≙1572°K beträgt 7,5 %.
Bei geringeren Bezugstemperaturen T_∞ bleiben die Fehler kleiner.

Die Abweichungen des Verlaufs von μ(T) nach Chapman-Rubesin von der Sutherlandgleichung für die Grenzschicht bei unterschiedlichen Temperaturverhältnissen T_w sind in den *Bildern 31 und 32* gezeigt.

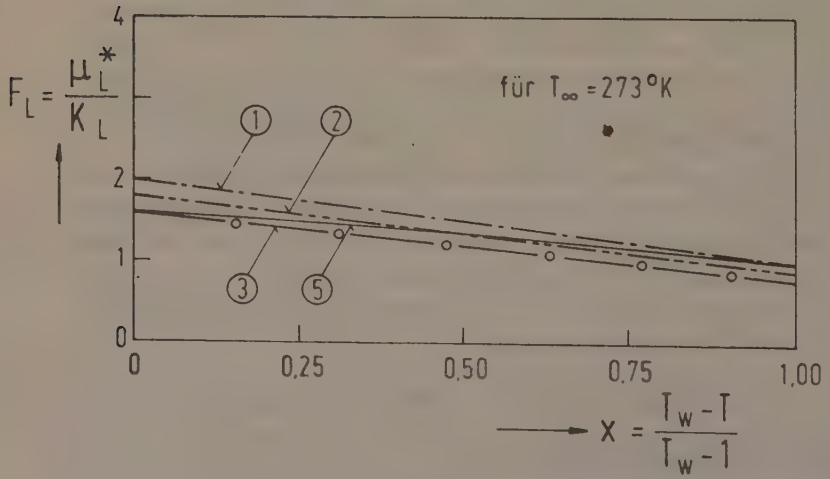


Bild 31 $T_w = 2$

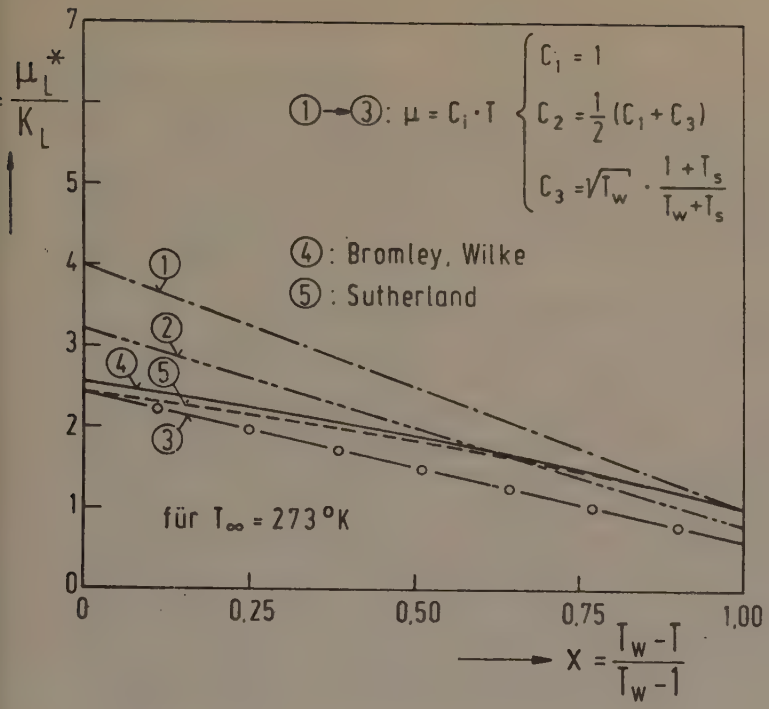


Bild 32 $T_w = 4$

Bei höheren Machzahlen ist es natürlich möglich, daß das maximale Temperaturverhältnis innerhalb der Grenzschicht größer ist als T_w. Entsprechend größer sind die Abweichungen. Tab. 2 gibt die Werte für C für verschiedene Temperaturverhältnisse T_w wieder.

	T_w	0,1	0.5	1	1,5	2	3	4
C	$T_\infty = 273^\circ K$	0,997	1,14	1	0,89	0,8	0,69	0,61
	$T_\infty = 150^\circ K$			1	0,93	0,86	0,764	0,69
	$T_\infty = 100^\circ K$			1	0,966	0,92	0,84	0,77

Tabelle 2

Rechnet man mit dem Wert C = 1, d.h. am Außenrand der Grenzschicht ist der Wert der Zähigkeit richtig und wird zur Wand hin schlechter, so ist bei einer Bezugstemperatur von $T_\infty = 273^oK$ und $T_w = 4$ der größte Fehler ca. 4o %. Man rechnet in Wandnähe mit zu großer Zähigkeit. Für $T_\infty < 273^oK$ und kleinere Temperaturverhältnisse T_w werden die Fehler wieder kleiner.
Wie aus Tab. 2 ersichtlich ist, gilt für $T_w > 1 : C \leq 1$. Welchen Wert für C man auch einsetzt, das Ergebnis ist immer fehlerhaft, verglichen mit der tatsächlichen nichtlinearen Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit. Ausgehend von der Gesamtlösung der Grenzschichtrechnung 1. u. 2. Näherung läßt sich nicht einmal eine genaue Aussage über den jeweiligen Fehler machen. Für C = 1 wird die Wirkung der Zähigkeit in der Grenzschicht überbewertet, außer am äußeren Grenzschichtrand. Die Wirkung der Transportkoeffizienten μ und λ wird aber im Prinzip gerade gesucht. Es ist daher ratsam, eine obere Fehlergrenze zu wählen. Man kann dann sicher sein, daß der Zähigkeits- und Wärmeleitungseffekt nicht größer ist als die Rechnung zeigt. Daher wird für alle Temperaturverhältnisse und Machzahlen C = 1 gesetzt.

Für die Wärmeleitfähigkeit gilt für nichtpolare Moleküle die gleiche Abhägigkeit wie für die Zähigkeit. Es ist $\lambda^* = a \cdot c_p \mu^*$, d.h. $\lambda = \mu$; die Größe a ist für einatomige Gase a = 1 und für mehratomige wegen der inneren Freiheitsgrade kleiner als eins, aber nach Eucken immer noch konstant.

Numerik

Die Systeme partieller Differentialgleichungen vom parabolischen Typus, das nichtlineare der 1. Näherung sowie das lineare der 2. Näherung sind nur auf numerischem Weg zu lösen. Die Differentialgleichungen gehen dabei über in Systeme algebraischer Differenzengleichungen.
Unabhängig von der speziellen Diskretisierungsmethode gibt es bei parabolischen Differentialgleichungen zwei Wege, um zu einer numerischen Lösung zu kommen.

1.) Man ersetzt die Differentiale nach der Koordinate, die nicht in der höchsten Ableitung der Differentialgleichungen vorkommt - bei dem behandelten Grenzschichtproblem ist dies die wandparallele x-Koordinate - durch eine Differenzenformel. Die Ableitungen nach der Koordinate, die die höchste Ableitung der Gleichungen enthält und damit im wesentlichen den Typus der Differentialgleichungen bestimmt, läßt man als Differentiale stehen. Hier wäre das die wandsenkrechte y-Koordinate. Nimmt man an, die Funktionswerte seien an einer Stelle x_o für alle y-Werte bekannt, so erhält man für die gesuchte Funktion auf der Linie $x_o+\Delta x$, y eine gewöhnliche Differentialgleichung in y. Diese kann man dann nach Standardmethoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie z.B. Runge-Kutta-Verfahren, lösen.

2.) Die partielle Differentialgleichung wird vollständig in eine Differenzengleichung umgeformt, d.h. alle Differentiale der Differentialgleichung werden diskretisiert. Die Lösung der algebraischen Gleichungen liefert dann die Funktionswerte auf $x_o+\Delta x$, y.

Der Vorteil des erstgenannten Verfahrens besteht darin, daß der Diskretisierungsfehler bei gleicher Schrittweite bei den Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen erheblich kleiner ist als bei den Differenzenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Außerdem ist es bei den numerischen Lösungsmethoden gewöhnlicher Differentialgleichungen gleichgültig,

ob die Dgl. linear ist oder nicht, während eine Nichtlinearität bei Differenzenverfahren immer ein Iterationsverfahren bewirkt. Der Nachteil ist, daß die Verfahren für gewöhnliche Dgln. Anfangswertverfahren darstellen. Die Grenzschicht ist aber bezüglich der wandsenkrechten Koordinate kein Anfangswert, sondern ein Randwertproblem. Um z.B. das Runge-Kutta-Verfahren anwenden zu können, muß also zur bekannten Bedingung am inneren Rand ($x > o$, $y = o$) eine weitere geschätzt werden, deren Güte dann nach Vollziehen der Integration durch Vergleich der Lösung mit der bekannten Bedingung am äußeren Rand bewertet und verbessert werden kann. Es ist also immer, auch bei linearen Randwertaufgaben, mit einer notwendigen iterativen Verbesserung des geschätzten Anfangswertes und damit mit einer mehrfachen Integration der Dgl. zu rechnen. Dies um so mehr, als die Lösung i.a. sehr empfindlich von der Genauigkeit der Anfangswerte abhängig ist. Darüber hinaus gibt es i.a. keine Möglichkeit à priori auch nur annähernd etwas definitiv über die Größenordnung oder gar über den genauen Wert des fehlenden Startwertes auszusagen.

Die Folge ist zwangsläufig bei wiederholter Anwendung des Verfahrens ein starkes Anwachsen der Rechenzeiten.

Die wiederholte Anwendung ist hier in jedem Fall gegeben, da die Prozedur ja für jede Stützstelle x auf's Neue ablaufen muß. Nicht zuletzt die zu erwartenden Rechenzeiten geben den Ausschlag zu Gunsten des Differenzenverfahrens.

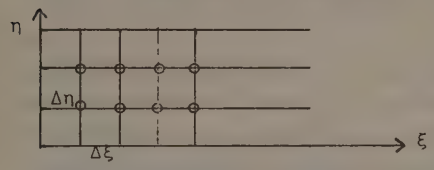
Die dabei auftretenden Fragen nach Konvergenz, Konsistenz und Stabilität lassen sich bei den hier behandelten Gln. nicht völlig beantworten. Die Konsistenz läßt sich durch Vergleich mit den Dgln. bestätigen, die Stabilität des Verfahrens, abhängig von der Fehlerausbreitung und damit auch vom Verhältnis der Schrittweiten kann nur am Verhalten der numerischen Lösung nachgewiesen werden. - Die Angewandte Mathematik liefert hierzu nur Aussagen bei linearen Dgln. mit konstanten Koeffizienten -. Die Konvergenz schließlich kann man überhaupt nicht nachweisen. Es bleibt nur zu hoffen, daß Konvergenz gewährleistet ist, wenn das Verfahren konsistent und stabil ist.

Diese Fragen treten natürlich bei dem oben beschriebenen und abgelehnten 1. Verfahren auch auf -. Die noch offene Frage, welches Differenzenverfahren verwendet werden sollte, fiel eindeutig zu Gunsten des sog. CRANK-NICHOLSON-Verfahrens aus. Hierbei handelt es sich um ein implizites Verfahren mit Zentraldifferenzen.

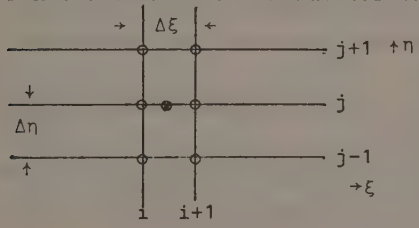
Ein implizites Verfahren hat den Vorteil, daß die Wahl der Schrittweiten keiner Beschränkung aufgrund der Stabilitätsforderung unterliegt wie dies bei expliziten Verfahren der Fall ist. Eine Folge davon ist, daß trotz größeren mathematischen Aufwands die Rechenzeiten bei impliziten Verfahren kürzer sind als bei expliziten.

Ein Vergleich der Diskretisierungsformel für Zentraldifferenzen mit Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzen bezüglich der Abbruchfehler zeigt, daß die Fehler bei Zentraldifferenzen um eine Größenordnung in der Schrittweite genauer sind.

Das Lösungsgebiet ist hier, in den Koordinaten ξ, η, einseitig offen, wobei der untere Rand die feste Wand und der obere Rand die äußere Grenze der Grenzschicht darstellt. Das Feld wird in ein rechtwinkliges Gitter aufgeteilt und die Funktionswerte in den Gitterpunkten bestimmt. Nachdem eine Anfangsverteilung bei $\xi = o$ berechnet worden ist, schreitet die Rechnung in ξ-Richtung weiter, wobei die Funktionswerte auf einer Linie ξ-konstant simultan berechnet werden.



Bei dem verwendeten Zentraldifferenzenverfahren werden die Funktionswerte an 6 benachbarten Gitterpunkten benötigt. Die Differentiale in den Gln. werden für den zentralen Punkt $i+\frac{1}{2}$, j diskretisiert. Die Werte in diesem Punkt selbst tauchen dabei in den Differenzengleichungen nicht mehr auf.



Im einzelnen werden die Differentiale wie folgt diskretisiert:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{\substack{j \\ i+\frac{1}{2}}} = \frac{f_j^{i+1} - f_j^i}{\Delta\xi} + O(\Delta\xi^2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_{\substack{j \\ i+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\,\frac{f_{j+1}^{i+1} + f_{j+1}^i - f_{j-1}^{i+1} - f_{j-1}^i}{2\Delta\eta} + O(\Delta\eta^2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)_{\substack{j \\ i+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\,\frac{f_{j+1}^{i+1} + f_{j+1}^i - 2(f_j^{i+1}+f_j^i) + f_{j-1}^{i+1} + f_{j-1}^i}{\Delta\eta^2} + O(\Delta\eta^2)$$

(A1)

Der Abbruchfehler ist in allen Fällen proportional dem Quadrat der Schrittweite. Im Anhang ist ein Schema angegeben, wie solche Diskretisierungsgleichungen praktisch jeder gewünschten Genauigkeit schnell hergeleitet werden können.

Die Lösung des Gleichungssystems der 1. Näherung: Mit Hilfe der Howarth-Transformation sind Impuls- und Energiegleichung zwar entkoppelt worden, aber die Impulsgleichung ist natürlich nach wie vor nichtlinear. Die Geschwindigkeit v senkrecht zur Wand ist in den Gln. durch die Kontinuitätsgl. eliminiert worden. Wenn eine Gitterlinie i N+1 Stützstellen enthält ($1 \leq j < N+1$), dann ergibt sich ein System von N-1Gleichungen für die N-1 unbekannten Werte fj (j=1 ist die Wand und j=N+1 der äußere Rand). Für die Bewegungsgleichung wird dieses nichtlineare System nach einer N-1 dimensionalen Newton-Iteration linearisiert. Das bedeutet praktisch, die Funktion $f_{\substack{i+1 \\ j}}$ wird angenähert durch

$f_{\substack{i+1 \\ j}}^{(n+1)} = f_{\substack{i+1 \\ j}}^{(n)} + df_j$; dabei bedeutet n die Anzahl der Iterationen

Die wegen der Produkte der $f_{\substack{i+1 \\ j}}$ auftretenden quadratischen Terme

von $df_{\substack{i+1 \\ j}}$

werden vernachlässigt. Die Ausgangswerte der Iteration, die f^{o}_{i+1} , werden mit Hilfe der bereits berechneten Werte der $_{j}$
Gitterlinien i, i-1, und i-2 extrapoliert:

$$f^{o}_{i+1} = 3f_i - 3f_{i-1} + f_{i-2} + O(\Delta\xi^3) \qquad (A2)$$

Wegen des geringen Abbruchfehlers dieser Extrapolation waren fast im ganzen Lösungsgebiet nur 2 Iterationen nötig, um eine relative Genauigkeit der Funktionswerte von 10^{-6} zu erreichen. Dies ist die Genauigkeitsschranke für alle in dieser Arbeit durchgeführten Iterationsprozesse. Das in den df_j lineare Gleichungssystem wird nach dem Gauss-Alphorithmus aufgelöst. Häufig werden bei großen Gleichungssystemen - hier sind es ca. 100 Gln. (abhängig von der Schrittweite $\Delta\eta$ und der Grenzschichtdicke) - punktiterative Lösungsmethoden bis zur sukzessiven Überrelaxation angewendet. Die Methode ist aber nur dann von Nutzen, wenn die Koeffizientenmatrix des Systems viele Nullen enthält, die statistisch verteilt sind und sich somit im Gauss'schen Eliminationsprozeß nicht von vornherein ausschließen lassen. Ist dies nicht der Fall, wie beim hier vorliegenden Gleichungssystem, so ist der Gauss-Alghorithmus schneller als die besten punktiterativen Verfahren. Das gleiche gilt auch für die nichtlineare Überrelaxation, bei der im wesentlichen der gleiche Linearisierungsprozeß durchgeführt wird wie im hier verwendeten Newtonverfahren.

Die Startwerte für das Geschwindigkeitsprofil werden berechnet durch Integration der Dgl. bei ξ = o nach dem Runge-Kutta-Verfahren. Das bietet sich hier an, weil in dem speziellen Fall die fehlende 2. Anfangsbedingung bei η = o berechnet werden kann. Dazu benötigt man nur genau eine weitere Integration der Dgl. (Loitsianski u.a.).
Durch die Rechnung wird auch die anfängliche Streifenbreite, d.h. bei festen $\Delta\eta$ die Anzahl N der Stützstellen bestimmt. Und zwar wird die Integration der Dgl. bis zu einem η-Wert durchgeführt, wo der Geschwindigkeitsgradient $\frac{\partial u_1}{\partial \eta} < 10^{-9}$ wird.

Im Verlauf der weiteren Rechnung für $\xi > o$ wird die Streifenbreite der wachsenden Grenzschichtdicke angepaßt, so daß bei konstanter Schrittweite $\Delta \eta$ die Zahl der Stützpunkte zunimmt. Und zwar wird, um Iterationen zu vermeiden, aus der bekannten Stützstellenzahl bereits berechneter Gitterlinien auf den neuen Wert extrapoliert und nach Lösen des Gleichungssystems nur noch einmal die Genauigkeit überprüft.
Da die Energiegleichung linear ist, kann man das System der Differenzengleichungen mit dem Gauss-Algorithmus sofort nach der Temperatur auflösen.
Bei der Diskretisierung der Differentiale an den Rändern des Lösungsbereichs ist es notwendig, Stützstellen mit mehr oder weniger fiktiven Funktionswerten außerhalb der Ränder anzunehmen. Die Funktionswerte werden bestimmt, indem die Differenzengleichung für einen Punkt auf dem jeweiligen Rand hingeschrieben wird und unter Benutzung der Randbedingung nach dem unbekannten Funktionswert außerhalb des Randes aufgelöst wird.

2. Näherung

Da die Bewegungsgleichung und die Energiegleichung für die 2. Näherung trotz Anwendung der Howarth-Transformation gekoppelt bleiben, ist ein iteratives Vorgehen bei der Lösung der entsprechenden Gleichungssysteme der Differenzengln. nicht zu umgehen. Aufgrund der Reihenentwicklung nach dem Störparameter sind die Dgln. natürlich linear. Der wesentliche Unterschied in der numerischen Behandlung des Gleichungssystems für die 2. Näherung im Vergleich zu dem der 1. Näherung besteht in dem von ξ abhängigen Druckterm, der aus der Lösung der Außenströmung folgt und den nicht konstanten Randbedingungen für die Geschwindigkeit und die Temperatur für $\eta \to \infty$.
Es zeigte sich jedoch, daß in diesem Fall das Lösungsverfahren hochgradig instabil war, was wohl hauptsächlich auf - an sich geringfügige - Schwankungen im berechneten Druckverlauf zurückzuführen war . Bei dem in den Gleichungen auftretenden Differential des Druckes machten sich diese Schwankungen dann natürlich stärker bemerkbar. Die Schwierigkeit wurde behoben, indem der Druckverlauf geglättet wurde und zusätzlich alle abhängigen

Größen der 2. Näherung, u_2, T_2 und ϱ_2, jeweils auf den örtlichen Druck bezogen wurden. Da diese Strömungsgrößen am äußeren Rand als Folge des Anpassens an die Außenströmung linear vom Druck abhängen, war mit dieser Maßnahme die Variation in den Randbedingungen unterdrückt.
Wie die numerische Rechnung zeigte, war das Lösungsverfahren damit wieder stabil. Selbstverständlich wurde auch bei den linearen gekoppelten Gleichungssystemen, um möglichst genaue Anfangswerte bei dem iterativen Prozeß an der Stelle $\xi = \Delta\xi(i+1)$ zu haben, eine der Größen - hier ist es die Temperatur - aus den bekannten Werten bei i, i-1 und i-2 bis auf einen Fehler $O(\Delta\xi^3)$ extrapoliert.
Für ξ=o sind die Dgln. 2. Näherung von ξ unabhängig, und es müssen für die Startwerte zwei gekoppelte lineare gewöhnliche Dgln. 2. Ordnung gelöst werden.
Es ist nun möglich, auch in diesem Fall (ohne Kopplung s. Maslen, Gersten) s.S.45 das Gleichungssystem einmal zu integrieren und daraus die ersten Ableitungen von u_2 und T_2 nach y bei y=o zu bestimmen. Nach Elimination der Temperatur T_2 aus der Bewegungsgl. resultiert für die Geschwindigkeit u_2 eine Differentialgl. 2. Ordnung mit zwei Anfangswerten bei η=o. Damit wäre die Voraussetzung gegeben, die Gleichung nach der Methode von Runge-Kutta sofort integrieren zu können. Bei der Durchführung zeigte es sich jedoch, daß die Lösung mit kleiner werdender Schrittweite nicht konvergierte. Speziell das Geschwindigkeitsprofil weist diese Tendenz auf. (*Siehe Bild*)

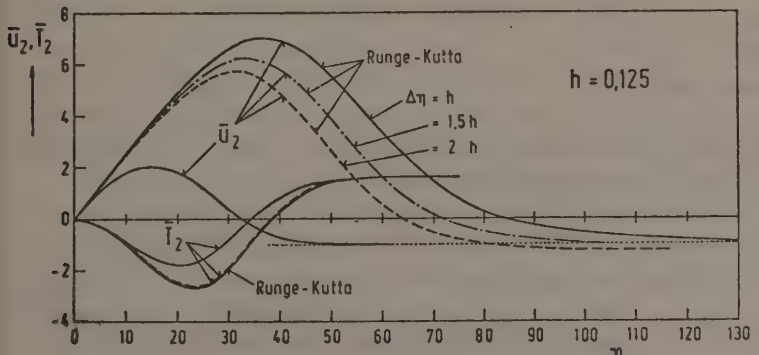


Bild 34

Der Grund dafür ist einmal darin zu suchen, daß die Anfangswerte und Koeffizienten die Lösung der Gl. für die 1. Näherung enthalten und damit auch deren numerische Ungenauigkeit. Zum anderen sei auf das Buch von ACTON verwiesen, der dort die Problematik bei der numerischen Integration von Anfangswertproblemen diskutiert, deren Lösung Exponentialfunktionen enthalten. Im vorliegenden Fall kennt man die analytische Lösung natürlich nicht, aber die Gestalt der Dgl. läßt auf das Vorhandensein von Exponentialfunktionen in der Lösung schließen. Aus diesem Grund wurde auch das Gleichungssystem für ξ=o mit Hilfe des beschriebenen impliziten Differenzenverfahren gelöst. Dabei zeigten sowohl Temperatur- als auch Geschwindigkeitsprofil praktisch keine Veränderung bei Schrittweitenänderung oder Vermehren der Stützstellen durch Vergrößern des Integrationsintervalls über die Grenzschichtdicke 1. Ordnung hinaus.

Schrittweitenwahl

Mit Verkleinern der Schrittweite wächst natürlich ganz allgemein die Genauigkeit der Lösung, da die Abschneidefehler geringer werden. Da jedoch die Rechenzeit z.B. beim Durchlaufen des Gauss'Algorithmus etwa mit der 3. Potenz der Anzahl der Gleichungen wächst, ist abzusehen, daß aufgrund der Rechenzeit- und Speicherkapazitätbeschränkung sehr schnell eine obere Grenze der Genauigkeit erreicht ist. Nach mehreren Testläufen wurden die Schrittweiten $\Delta\eta$ = 0.2 und $\Delta\xi$ = 0.02 festgelegt. Der relative Fehler der Lösung liegt dabei im Vergleich zu den mit jeweils der halben Schrittweite berechneten Werte in der Größenordnung $O(10^{-3})$ - $O(10^{-4})$. Nur in der unmittelbaren Umgebung des Ablösepunktes 1. Ordnung ist der Fehler größer. Dies ist hier aber nicht von Bedeutung, da die Ablösepunkte 2. Ordnung, wie aus den Ergebnissen ersichtlich ist, weit vor diesem Gebiet liegt und der Ablösepunkt 1. Ordnung ist von Stewartson, Catherall und Williams mit großer Genauigkeit bestimmt worden. Der hier berechnete Ablösepunkt 1. Ordnung weicht dabei um ca. 0,3 % von dem von Stewartson u.a. bestimmten ab. Da speziell die Strömungsgrößen an der Wand interessierten, wurde in einem wandnahen Bereich die Schrittweite um den Faktor 10 verkleinert

Die Anzahl der Iterationen lag im Mittel zwischen 2 und 5, um eine relative Genauigkeit von 10^{-6} zu erreichen. Dies war abhängig von der Wahl der Parameter $\dot{m}_{1w}$, Ma_∞ und T_w. abei zeigte sich, daß mehr Iterationen notwendig wurden, je weiter die Zahlenwerte für Ma_∞ und T_w von 1 entfernt lagen, während eine Variation in $\dot{m}_w$ praktisch keinen Einfluß hatte. Darüber hinaus waren beim Kreiszylinder etwa doppelt so viel Iterationen nötig wie bei der ebenen Platte (o.a.Werte). Bei Annäherung an den Ablösepunkt aus der 1. Näherung nahm die Zahl der notwendigen Iterationen stark zu.

Die an der TR 440 erzielten Rechenzeiten für eine komplette Lösung des Strömungsfeldes 1. und 2. Näherung von $\xi = o$ bis zum Ablösepunkt 1. Ordnung ξ_{s1} lagen zwischen 5 und 10 Minuten. Wie aus dem Vorhergesagten zu ersehen ist, gelten die längeren Zeiten für den Kreiszylinder und stark von eins abweichende Machzahlen und Temperaturverhältnisse.

Bei der Diskretisierung von Differenzialausdrücken ist eine möglichst genaue Wiedergabe durch die benutzten Differenzengleichungen wünschenswert.
Beim Aufbau der Diskretisierungsformeln geht man von einer Taylorentwicklung der gesuchten Funktion $y(x)$ um einen Punkt $x_i = i \cdot \Delta x$ aus (Δx = Schrittweite). Hier wird ein einfaches Schema angegeben, um Differentiale $y_i^{(m)}$ ($m = 1,2,\ldots$) in einem Punkt x_i bis zu jeder gewünschten Genauigkeit mit Hilfe der benachbarten Funktionswerte $y_{i\pm k}$ ($k = o,1,2,\ldots$) zu approximieren. Die Taylorreihenentwicklung für $y_{i\pm k}$ liefert:

$$y_{i\pm k} = y_i \pm k y_i' \Delta x + \frac{k}{2!} y_i'' \Delta x^2 \pm \frac{k^3}{3!} y_i''' \Delta x^3 + \ldots \pm \ldots \frac{k^m}{m!} y_i^{(m)} \Delta x^m \ldots \qquad (A3)$$

Gesucht sind nun die Koeffizienten $n_{\pm k}$ in einer Differentialgleichung, um $y_i^{(m)}$ mit einer bestimmten Genauigkeit darzustellen; z.B. y_i' mit einem Fehler von höchstens $O(\Delta x^4)$. Zur Bestimmung der $n_{\pm k}$ wird zunächst folgendes Gleichungssystem aufgestellt:

$$n_{k_1}\, y_{i+k_1} = n_{k_1}\left\{ y_i + k_1 y_i' \Delta x + k_1^2 \cdot \frac{1}{2!} y_i'' \Delta x^2 + \cdots + k_1^m \frac{1}{m!} y_i^{(m)} \Delta x^m \cdots \right\}$$

$$\vdots$$

$$n_1\, y_{i+1} = n_1 \left\{ y_i + y_i' \Delta x + \frac{1}{2!} y_i'' \Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{m!} y_i^{(m)} \Delta x^m \cdots \right\}$$

$$\vdots$$

$$n_{-1}\, y_{i-1} = n_{-1}\left\{ y_i - y_i' \Delta x + \frac{1}{2!} y_i'' \Delta x^2 - \cdots (-1)^m \frac{1}{m!} y_i^{(m)} \Delta x^m \cdots \right\}$$

$$\vdots$$

$$n_{-k_2} y_{i-k_2} = n_{-k_2}\left\{ y_2 - k_2 y_i' \Delta x + k_2^2 \frac{1}{2!} y_i'' \Delta x^2 - \cdots (-k_2)^m \frac{1}{2!} \right.$$

$$\left. y_i^{(m)} \Delta x^m \cdots \right\} \qquad (A4)$$

Dabei muß nicht notwendigerweise $k_2 = k_1$ sein. Für $k_2 = k_1$ erhält man die sog. Zentraldifferenzenformeln, in allen anderen Fällen unsymmetrische (bezüglich der $y_{i \pm k}$) Gleichungen.
Um nun eine bestimmte Genauigkeit für die diskretisierte Darstellung eines Differentials zu erhalten, müssen die Summe der Koeffizienten der jeweils nicht gesuchten Differentialausdrücke in den Gleichungen (A4) verschwinden. Diese Bedingung liefert das Gleichungssystem für die Koeffizienten $n_{\pm k}$.
Hieraus wird sofort ersichtlich, daß um so mehr Nachbarpunkte von y_i benötigt werden, je höher die geforderte Genauigkeit und die Ordnung des gesuchten Differentials ist.
Es folgen einige Beispiele zur Erläuterung:

1. y_i' mit Fehler $O(\Delta x^2)$
   es sollen Zentraldifferenzen verwendet werden, d.h. es ist $k_1 = k_2 = 1$
   aus dem Gleichungssystem (A4) liest man ab:
   (nach Division mit Δx)

   $$[y_i'] = n_1 - n_{-1} = 1$$

   $$[\tfrac{1}{2!} y_i'' \Delta x] = n_1 + n_{-1} = 0$$

daraus folgt: $n_1 = \frac{1}{2}$; $n_{-1} = -\frac{1}{2}$

d.h. $y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$

2. y_i'' mit Fehler $O(\Delta x)$ mittels Zentraldifferenzen

wieder ist $k_1 = k_2 = 1$ und aus folgt das Gleichungssystem für $n_{\pm 1}$ (nach Division mit Δx^2)

$$[y_i' \frac{1}{\Delta x} \cdot] = n_1 - n_{-1} = 0$$

$$[\frac{1}{2} y_i''] = n_1 + n_{-1} = 1$$

mit dem Ergebnis $n_1 = n_{-1} = \frac{1}{2}$

damit folgt $y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$

vergleicht man noch die Koeffizienten von $y_i''' \cdot \Delta x$, so stellt man fest, daß diese für $n_1 = n_{-1} = \frac{1}{2}$ verschwinden, ohne daß es gefordert war.

Es ist folglich

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

Diese Eigenschaft, daß die Genauigkeit der Differenzengleichung mitunter höher als gefordert ist, tritt nur bei den Zentraldifferenzenformeln auf, und zwar bei gradzahligen Ableitungen. Die beiden hergeleiteten Näherungen für y_i' und y_i'' sind die am häufigsten verwendeten.

Wünscht man für y_i' und y_i'' eine bessere Näherung, z.B. y_i' mit einem Fehler von $O(\Delta x^4)$ und y_i'' mit $O(\Delta x^3)$, dann erhält man als Gleichungssystem im 1. Fall: ($k_1 = k_2$)

$$[y_i'] \quad = \quad 2\,n_2 \;/\; n_1 - n_{-1} - 2\,n_{-2} \;=\; 1$$

$$[\tfrac{1}{2}\, y_i''\, \Delta x] \quad = \quad 4\,n_2 + n_1 + n_{-1} + 4\,n_{-2} \;=\; 0$$

$$[\tfrac{1}{3!}\, y_i'''\, \Delta x^2] \quad = \quad 8\,n_2 + n_1 - n_{-1} - 8\,n_{-2} \;=\; 0$$

$$[\tfrac{1}{4!}\, y_i^{(4)}\, \Delta x^3] \quad = \quad 16\,n_2 + n_1 + n_{-1} + 16_{n-2} \;=\; 0$$

Die Auflösung des Gleichungssystems liefert:

$$n_1 = \frac{2}{3} \;;\; n_2 = -\frac{1}{12} \;;\; n_{-1} = -\frac{2}{3} \;;\; n_{-2} = \frac{1}{12}$$

und damit ergibt sich für y_i' :

$$y_i' = \frac{1}{12\Delta x}\;(-\,y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}) + O(\Delta x^4)$$

und analog für y_i''

$$[y_i'\,\tfrac{1}{\Delta x}] \quad = \quad 2\,n_2 + n_1 - n_{-1} - 2\,n_{-2} \;=\; 0$$

$$[\tfrac{1}{2}\, y_i''] \quad = \quad 4\,n_2 + n_1 + n_{-1} + 4\,n_{-2} \;=\; 1$$

$$[\tfrac{1}{3!}\, y_i'''\, \Delta x] \quad = \quad 8\,n_2 + n_1 - n_{-1} + 8\,n_{-2} \;=\; 0$$

$$[\tfrac{1}{4!}\, y_i^{(4)} \Delta x^2] \quad = \quad 16\,n_2 + n_1 + n_{-1} + 16\,n_{-2} \;=\; 0$$

Wie man sieht, sind die Gleichungssysteme bis auf den inhomogenen Teil identisch, was aber aufgrund der Herleitung selbstverständlich ist.
Die Lösung des Gleichungssystems ist:

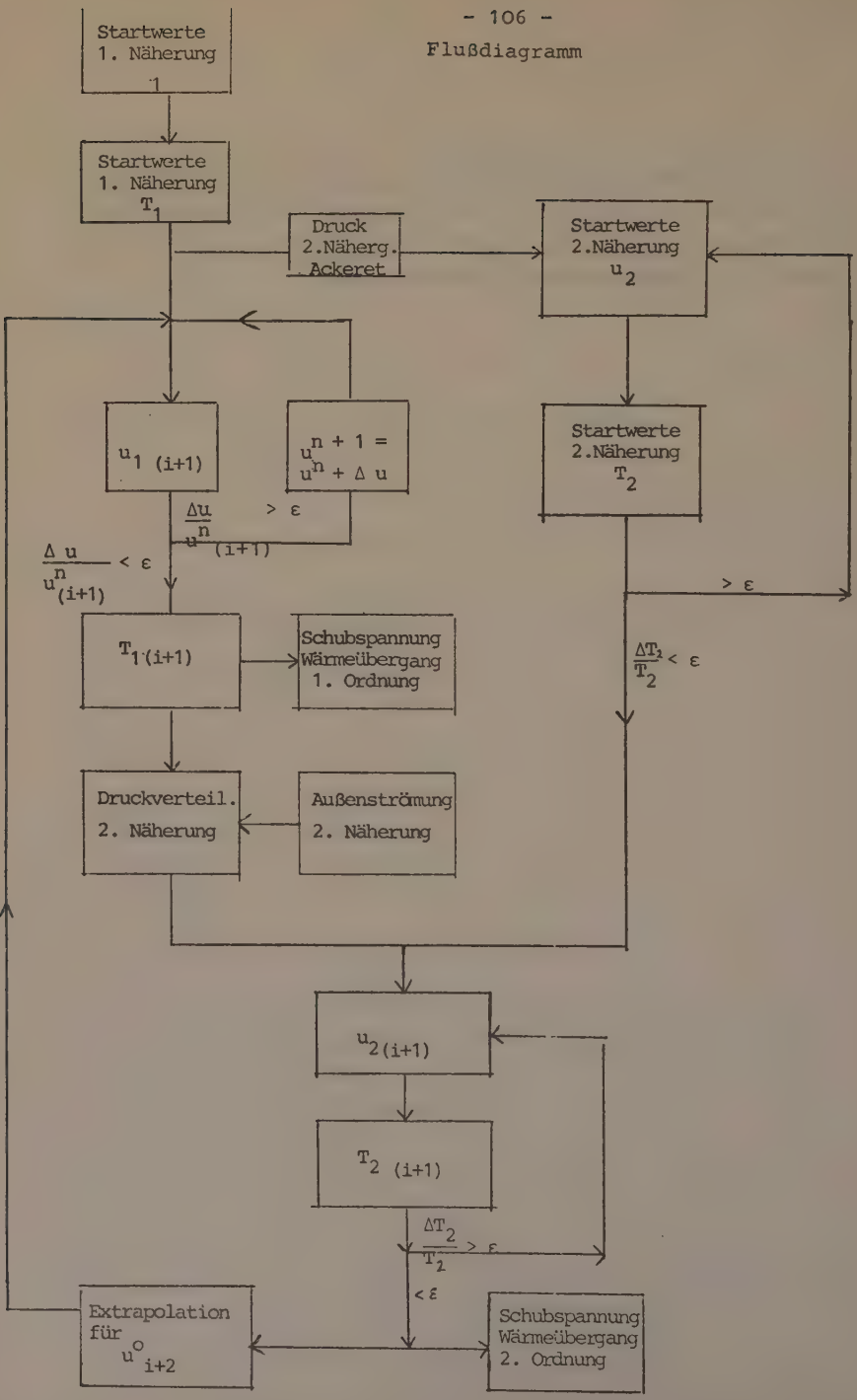
$$n_1 = \frac{2}{3} \;;\; n_2 = -\frac{1}{24} \;;\; n_{-1} = \frac{2}{3} \;;\; n_{-2} = -\frac{1}{24}$$

und

$$y_i'' = \frac{1}{12\Delta x^2}\;(-\,y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}) + O(\Delta x^4)$$

Die Erhöhung der geforderten Genauigkeit von Δx^3 auf Δx^4 ist wieder sozusagen gratis mitgeliefert worden. Hier sind zwar nur Beispiele mit Zentraldifferenzen aufgeführt worden, aber unsymmetrische, also vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzen, lassen sich ebenso schnell bestimmen.

Flußdiagramm



[1] M. ABRAMOWITZ. I. A. STEGUN:
Handbook of mathematical functions.
Dover Pub., New York

[2] J. BUCKMASTER:
Effect of transverse curvature on the singularity of separation for a laminar boundary layer.
Phys. of Fluid 14, 1971 , 1593-1595

[3] D. BURNETT:
Proc. of London Math. Soc. 40, 1935, 382-435

[4] D. W. CLUTTER, A. M. O. SMITH:
Solution of the general boundary-layer equations for compressible laminar flow, including transverse curvature.
Douglas Aircraft Co., Rep. No. LB 31088 ,1963

[5] K. GERSTEN, J. F. GROSS:
The second-order boundary layer along a circular cylinder in supersonic flow.
Int. J. Heat Mass Transfer 16, 1973 , 2241-2260

[6] M. B. GLAUERT, M. J. LIGHTHILL:
The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder.
Proc. Roy. Soc., London, Ser. A 230, 1955 , 188-203

[7] R. IGLISCH:
Exakte Berechnung der laminaren Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung.
Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung
Bd. 8B Heft 1, 1944

[8] N. H. JAFFÉ, T. T. OKAMURA:
The transverse curvature effect on the incompressible laminar boundary layer for longitudinal flow over a cylinder.
ZAMP 19, 1968, 564-574

[9] D. R. KASSOY:
A resolution of the blow-off singularity for similarity flow on a flat plate.
J. Fluid Mech. 62, 1974, 145-161

[10] J. KLEMP, A. ACRIVOS:
High Reynolds number flow past a flat plate with strong blowing.
J. Fluid Mech. 51, 1972, 337-356

[11] Y. H. KUO:
Viscous flow along a flat plate moving of high supersonic speeds.
J. Aeron. Sci. 23, 1956, 125-136

[12] L. LEES, R.F. PROBSTEIN:
Hypersonic viscous flow over a flat plate.
Princton Univ. Aero. Eng. Lab. Rep. No. 195, 1952

[13] C. H. LEWIS:
Comparison of a first-order treatment of higher-order boundary layer effects with second-order theory and experimental data
Arnold Eng. Develop. Center, Rep. No. AEDC-TR-68-148, 1968

[14] S. H. MASLEN:
Second-order effects in laminar boundary layer.
AIAA J. 1, 1963, 33-40

[15] H. SCHLICHTING:
Grenzschichttheorie.
G. Braun, Karlsruhe, 1965

[16] R. A. SEBAN, R. BOND:
Skin-friction and heat-transfer charakteristics of a laminar boundary layer on a cylinder in axial incompressible flow.
J. Aeron. Sci, 18, 671-675, 1951

[17] G. D. SMITH:
Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen.
Vieweg, Braunschweig, 1970

[18] K. STEWARTSON, D. CATHERALL, P. G. WILLIAMS:
Viscous flow past a flat plate with uniform injection.
Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 284, 1965, 370-396

[19] K. STEWARTSON:
Is the singularity of separation removable?
J. Fluid Mech. 44, 1970, 347-364

[20] K. STEWARTSON:
The theory of laminar boundary layers in compressible fluids.
The Clarendon Press, Oxford, 1964

[21] H. S. TSIEN:
Superaerodynamics, mechanics of rarefied gases.
J. Aeron. Sci., 13, 1946, 653-664

[22] M. Van DYKE:
Higher approximations in boundary layer theory.
J. Fluid Mech. 14, 161-177 und 481-495 (1962)
J. Fluid Mech. 19, 1964, 145-160

[23] M. Van DYKE:
Perturbation methods in fluid mechanics.
Academic Press, New York, 1964

[24] M. Van DYKE:
Higher order boundary layer theory.
Ann. Rev. Fluid Mech. 1, 1969, 265-292

[25] D. J. WANOUS, E. M. SPARROW:
Longitudinal flow over a circular cylinder with surface mass transfer.
AIAA J. 3, 1965, 147-149

[26] G. N. WARD:
Linearized theory of steady high-speed flow.
Cambridge Univ. Press, 1955

[27] G. N. WATSON:
The theory of Bessel functions.
Cambridge, 2. ed., 1944

[28] G. R. INGER, T. F. SWEAN Jr.:
Vectored injection into non-adiabatic boundary layer flows including incipient separation
VPI-Aero-003, Juni 1973
Virginia Polytech. Inst. and State Univ.

[29] K. NICKEL, Arch. Rat. Mech. 2 (1958/59) 1

[30] C. MAXWELL, Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London 170 (1879) 231-156

[31] L. LOITSIANSKI, Laminare Grenzschichten,
Akademie-Verlag Berlin, 1967

L e b e n s l a u f

Artur Eberhard Wehrum, geb. am

31.01.1941	in Kirchen a.d. Sieg
1947-1952	Besuch der Volksschule in Kirchen
1952-1961	Besuch des Neusprachlichen Gymnasiums in Betzdorf a.d. Sieg
Feb. 1961	Reifeprüfung
April 1961 - Oktober 1962	Wehrdienst bei einer Fallschirmjägereinheit, Reserveoffizier
Oktober 1963	Industrietätigkeit und Praktikum bei den Firmen Friedrichshütte AG, Herdorf und SIEMAG, Eiserfeld
April 1963 - Dez. 1968	Physikstudium an der TH Darmstadt
April 1965	Vordiplom
Dez. 1968	Diplomprüfung
1. März 69 - 31. Jan. 71	Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Thermo- und Fluiddynamik der Ruhr-Universität Bochum (Lehrstuhl von Prof. Dr.-Ing. Gersten)
seit 1. Feb. 71	Wissenschaftlicher Assistent am selben Institut

Bamberger Fotodruck
GmbH & Co. KG.
Schadel & Wehle
86 Bamberg · Hohe-Kreuz-Str. 9b · Telefon: 0951/21617